CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

AUTORES
CLAUDIO BIDURIN
VALÉRIA GELFUSO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

AUTORES
CLAUDIO BIDURIN
VALÉRIA GELFUSO

1ª EDIÇÃO
SESES
RIO DE JANEIRO 2015

Sumário

1

Introdução às Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Neste primeiro capítulo vamos discutir os principais conceitos associados às equações diferenciais, suas origens e evolução, analisar alguns exemplos práticos e apresentar a montagem das equações diferenciais e seus diferentes tipos e os meios para identificá–los.

OBJETIVOS

- Refletir sobre os conceitos básicos de equações diferenciais.
- Entender o processo de construção de uma equação diferencial.
- Associar as equações diferenciais aos conteúdos de derivadas e integrais.
- Saber classificar as equações diferenciais.

1.1 Conceitos Básicos

Historicamente, as equações diferenciais começaram a ser estudadas por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII. Os irmãos Bernoulli também estudaram equações diferenciais. Além deles, Leonhard Euler, Joseph–Louis Lagrange e Pierre–Simon de Laplace foram importantes na criação de métodos para resolução de equações diferenciais assim como no estudo de suas aplicações. Outros matemáticos como Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel também colaboraram, como colocado em BOYCE e DiPRIMA (2014) para o desenvolvimento da área, levando seus nomes em diversos métodos e equações em homenagem a eles. Além deles, Jean–Baptiste Hoseph Fourier, que também foi aluno de Laplace e Lagrange fez estudos importantíssimos na área de equações diferenciais que possuem aplicações tecnológicas importantes nos dias de hoje nas áreas de telecomunicações e em processamentos de imagens digitais.

Ainda segundo BOYCE e DiPRIMA (2014), a evolução nos estudos das equações diferenciais se confunde com a evolução do próprio Cálculo Diferencial e Integral, já que as duas áreas guardam uma relação muito próxima entre si. Em especial, a maior impulsão em ambas está na articulação das teorias com as aplicações práticas, ou seja, na interdisciplinaridade da Matemática com outras áreas do conhecimento, como a Física, Química, Biologia, Economia, entre outras.

Pensando por este lado, é natural associar os estudos das equações diferenciais a Matemática Aplicada, devido à amplitude de problemas práticos que podem ser caracterizados através de equações diferenciais.

Mas, do que se trata essa caracterização matemática?

O termo caracterização matemática está relacionado com a arte da construção de modelos matemáticos, ou simplesmente modelagem. O objetivo da modelagem é representar um problema qualquer por meio de equações, no caso, equações diferenciais. Na construção dos modelos, como bem explicado em BOYCE e DiPRIMA (2014), é importante que sejam identificadas, com correção, as variáveis envolvidas e determinar corretamente qual a dependente e qual a independente, bem como, atribuir unidades de medidas adequadas e selecionar o princípio ou lei matemática que representa a relação funcional entre as variáveis.

Nesta disciplina, abordaremos tais modelos matemáticos em situações onde o princípio matemático é dado por uma equação diferencial.

Sim, mas uma questão essencial neste início de conversa é:

O que é uma equação diferencial?

Para responder a essa pergunta, convidamos você a refletir sobre outra questão: do que se trata o conceito de diferencial no contexto do Cálculo?

Se você pensou em derivadas, está com a razão. O Cálculo Diferencial está associado com derivadas e as taxas de variações de funções matemáticas.

Você estudou diversas situações práticas onde a taxa de variação era um fenômeno de interesse, tão importante quanto avaliar a própria função. Através das técnicas de derivadas, era possível avaliar a taxa de variação e verificar o que ocorria com a função para um dado ponto do domínio.

Neste sentido, BOYCE e DiPRIMA (2014) se refere às equações diferenciais como as relações matemáticas que utilizam a taxa de variação de uma função no equacionamento da relação, ou seja, uma equação que além das variáveis e da forma funcional, também possui uma derivada como componente. Assim, uma equação diferencial nada mais é do que uma equação que envolve variáveis e derivadas dessas variáveis.

Neste contexto, você pode argumentar: quais situações práticas podem necessitar analisar suas taxas de variação e derivadas, juntamente com as variáveis?

Bem, apenas a título de apresentação, podemos considerar questões relacionadas com o movimento de fluidos, a variação da corrente elétrica em circuitos, o comportamento da temperatura na superfície de objetos, a propagação de fenômenos sísmicos e também o comportamento relacionado ao crescimento populacional.

Continuando a analogia com o estudo das funções e equações, dependente do tipo de equação ou função, você se via obrigado a utilizar um rol de técnicas apropriadas para a manipulação da mesma. Por exemplo, em se tratando de uma equação exponencial, utilizaria propriedades de exponenciação e de logaritmos, caso fosse uma equação trigonométrica, as relações do ciclo trigonométrico e outras mais.

Da mesma forma, podemos ter diferentes tipos de equações diferenciais, mas como sabemos que essas equações possuem derivadas como componente, é natural supor que a construção, representação, resolução e interpretação das equações diferenciais exigirão domínio sobre as técnicas de derivação, e por consequência, domínio sobre as técnicas de integração.

As derivadas ou taxas de variação representadas nas equações diferenciais podem ser parciais ou não, de primeira ordem ou de ordem superior. Nesta disciplina trataremos de todos os tipos e classificações principais, focando principalmente as aplicações dentro da área de Engenharia que vai desde a área de Mecânica e Ondas até Termodinâmica, Eletromagnetismo e Eletrônica.

A área de equações diferenciais como modelagem vem assumindo um papel bastante importante nos últimos tempos, sendo uma das áreas mais promissoras da matemática aplicada.

Agora que você está mais familiarizado com o termo equação diferencial, deve estar se questionando o seguinte:

Como é possível resolver uma equação que envolve uma derivada?

Bem, para responder a essa pergunta, faremos uso de seus conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral, para mostrar como, de uma forma genérica, podemos resolver uma equação diferencial.

1.2 Soluções de equações diferenciais.

Existem muitos caminhos para resolver uma equação diferencial. Para entender isso, basta que você retroceda nos seus estudos básicos de funções e lembrará que para cada tipo de função existe um protocolo para resolução.

O mesmo ocorre com as equações diferenciais e tais protocolos, modelos de resolução serão detalhados oportunamente neste livro.

Por hora, vamos apenas ilustrar de forma geral o que ocorre quando partimos para a solução de uma equação diferencial.

Para iniciar nosso debate sobre a resolução, temos que, obviamente, dispor de uma equação diferencial para trabalhar. Já discutimos que uma equação diferencial, em sua forma mais simplificada, agrupa uma variável dependente y, uma variável independente x e a derivada de y em relação a x que pode ser representada por $\frac{dy}{dx}$, por y' ou por y'.

No exemplo 1 temos a representação de um tipo de equação diferencial.

Todas as equações diferenciais resolvidas neste capítulo utilizam o método da solução por integração direta, conforme exposto por EDWARDS e PENNEY (1995).

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 7x^2 + 2x$

De uma forma geral, o objetivo na resolução da equação diferencial é reduzi–la para a forma $y = f(x)$, ou seja, encontrar a função primitiva (original) cuja derivada é exatamente a equação diferencial, como pontuado em ZILL e CULLEN (2001).

Para isolar a variável dependente y na expressão, temos que inicialmente isolar a diferencial de y, da forma:

$$\frac{dy}{dx} = 7x^2 + 2x$$

$$dy = \left(7x^2 + 2x\right)dx$$

Como o termo à esquerda é uma diferencial, para resolver a questão temos que utilizar uma integral indefinida, de ambos os lados da equação, como explicitado em EDWARDS e PENNEY (1995). Assim, temos:

$$dy = \left(7x^2 + 2x\right)dx$$

$$\int dy = \int \left(7x^2 + 2x\right)dx$$

Resolvendo a integral em ambos os lados, temos:

$$\int dy = \int \left(7x^2 + 2x\right)dx$$

$$\int dy = \int \left(7x^2 + 2x\right)dx$$

$$y + C_1 = \frac{7}{3}x^3 + x^2 + C_2$$

$$y = \frac{7}{3}x^3 + x^2 + (C_2 - C_1)$$

$$y = \frac{7}{3}x^3 + x^2 + C$$

Assim, a equação diferencial está resolvida e essa solução, como apontado em BOYCE e DiPRIMA (2014) é chamada de **Solução Geral**.

Duas considerações sobre a solução de uma equação diferencial devem ser feitas neste momento.

Em primeiro lugar, para verificar a validade dessa solução, se está ou não correta, você pode simplesmente derivar ambos os lados da expressão e verificar se reproduz a função $\frac{dy}{dx} = 7x^2 + 2x$.

Considerando o resultado anterior, temos:

$$y = \frac{7}{3}x^3 + x^2 + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{7}{3}x^3 + x^2 + C\right)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\frac{7}{3}x^3}{dx} + \frac{dx^2}{dx} + \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3}3x^2 + 2x + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 7x^2 + 2x$$

Veja que o resultado é exatamente a equação diferencial original, o que confirma que a resposta está correta.

A segunda observação a ser feita é que a solução é geral, ou seja, dependendo do valor da constante C, pode assumir infinitas soluções.

Uma forma de ilustrar a questão é através da figura1.1, considerando 3 valores diferentes para C.
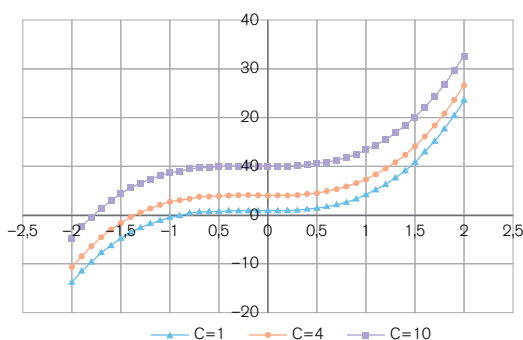
Figura 1.1 – Possíveis soluções para o exemplo 1, com C = 1, C = 4 e C = 10.

Note que, para possibilitar a construção dos gráficos ilustrados na figura 1.1, fixamos valores escolhidos de forma aleatória para a constante C, gerando assim uma solução particular da equação diferencial para cada C. Contudo, essa não é única forma de obter valores particulares para a equação diferencial.

Uma forma de obter uma **Solução Particular** para a equação diferencial, de acordo com EDWARDS e PENNEY (1995) é associar um resultado numérico para a mesma.

No caso do exemplo1, podemos estar interessados em uma solução que torne $y = 6$ para quando $x = 1$, ou seja $y(1) = 6$. Nesses casos, o valor de C não é escolhido aleatoriamente, mas definido com base na condição. Assim, temos:

$$y = \frac{7}{3}x^3 + x^2 + C$$

$$y(1) = \frac{7}{3}1^3 + 1^2 + C$$

$$6 = \frac{7}{3}1^3 + 1^2 + C$$

$$6 = \frac{7}{3} + 1 + C$$

$$C = 6 - 1 - \frac{7}{3}$$

$$C = \frac{18 - 3 - 7}{3}$$

$$C = \frac{8}{3}$$

Assim, uma solução particular para a equação diferencial do exemplo1, considerando a condição imposta, é:

$$y = \frac{7}{3}x^3 + x^2 + \frac{8}{3}$$

Vejamos outro exemplo.

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 10 - \frac{y}{3}$

Procedendo da mesma forma do exemplo 1, isolamos *dy* na equação, de forma que:

$$\frac{dy}{dx} = 10 - \frac{y}{3}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{30 - y}{3}$$
$$3dy = (30 - y)dx$$
$$\frac{dy}{(30 - y)} = \frac{dx}{3}$$

A expressão anterior pode ser escrita convenientemente da forma:

$$\frac{dy}{(y - 30)} = -\frac{dx}{3}$$

Integrando em ambos os lados, temos:

$$\int \frac{1dy}{(y - 30)} = -\int \frac{1dx}{3}$$

$$\ln|y - 30| + C_1 = -\frac{x}{3} + C_2$$

$$\ln|y - 30| = -\frac{x}{3} + (C_2 - C_1)$$

$$\ln|y - 30| = -\frac{x}{3} + C$$

Colocando ambos os lados na base exponencial, temos:

$$e^{\ln|y-30|} = e^{\left(-\frac{x}{3} + C\right)}$$

$$e^{\ln|y-30|} = e^{-\frac{x}{3}}.e^{C}$$

Como e também é uma constante, podemos escrever $e^c = C$.

$$y - 30 = Ce^{-\frac{x}{3}}$$

E finalmente chegamos a solução geral da equação diferencial que é:

$$y = Ce^{-\frac{x}{3}} + 30$$

Variando o valor da constante C, podemos encontrar diferentes soluções para a equação do exemplo 2, como ilustrado na figura 1.2.
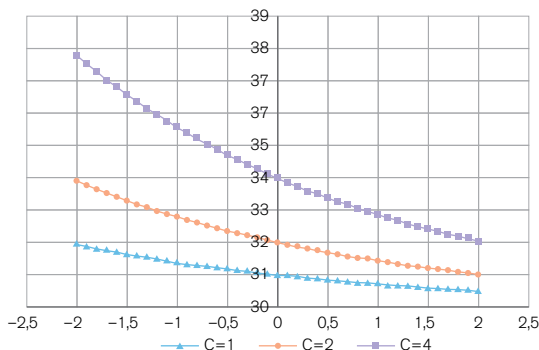
Figura 1.2 – Possíveis soluções para o exemplo 2, com C=1, C=2 e C=4.

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial 4x – y'=1

Isolando a derivada e escrevendo *y'* em termos de *dy* e *dx*, temos:

$$-\frac{dy}{dx} = 1 - 4x$$

$$\frac{dy'}{dx} = 4x - 1$$

Calculando a integral, temos:

$$\int dy = \int (4x - 1)dx$$

$$y + C_1 = \frac{4x^2}{2} - x + C_2$$

$$y = 2x^2 - x + (C_2 - C_1)$$

$$y = 2x^2 - x + C$$

Esse resultado é a solução geral da equação diferencial, com C uma constante qualquer.

É fácil verificar que a solução está correta, basta derivar e verificar que o resultado é igual a equação diferencial original.

Da mesma maneira já feita nos exemplos 1 e 2, variando o valor de C temos soluções particulares para a equação diferencial, como exibido na figura 1.3.
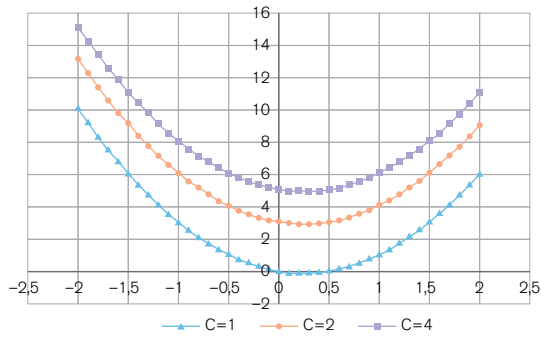
Figura 1.3 – Possíveis soluções para o exemplo 3, com C=0, C=3 e C=5

Ainda, é possível determinar uma solução particular para a equação diferencial colocando uma condição. Por exemplo, colocando que o valor de y(2) = 5. Colocando essa condição na solução geral, temos:

$$y = 2x^2 - x + C$$
$$y(2) = 2.2^2 - 2 + C = 5$$
$$8 - 2 + C = 5$$
$$6 + C = 5 \Rightarrow C = -1$$

Assim, uma solução particular da equação diferencial, a partir da condição inicial proposta é:

$$y = 2x^2 - x - 1$$

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Reescrevendo a equação diferencial e calculando a integral, temos:

$$\int y \ dy = \int -x \ dx$$
$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = (C_2 - C_1)$$
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$$
$$y^2 + x^2 = 2C$$

Agora, como C é uma constante, podemos considerar, sem incorrer em nenhum erro nas condições das equações diferenciais, que a constante $2C$ pode ser substituída por c^2, obtendo a seguinte solução geral:

$$y^2 + x^2 = C^2$$

Note que com a mudança na constante, a solução geral corresponde a equação de uma circunferência de C. Assim, variando o valor de C, temos diferentes circunferências que representam soluções para a equação diferencial.

Como a solução geral de uma equação diferencial possuirá uma constante de integração desconhecida, muitas vezes, para melhor representação da equação será necessário escrever a constante de maneiras especiais. Veja o exemplo 4, escrevemos a constante C como sendo C2. Isso não causa nenhum problema, pois a verificação da solução é feita com base da derivada da solução geral. Assim, se C é uma constante, C2 também é uma constante, ou eC também, e sendo assim a derivada de qualquer uma delas será igual a zero. Desta forma, não importa como a constante C será representada.

A partir do capítulo 2, veremos diferentes métodos para a resolução de uma equação diferencial, baseados em certas propriedades presentes nas equações diferenciais. Mas, antes disso, vamos verificar inicialmente quais as características de uma equação diferencial que lhe conferem diferentes classificações.

1.3 Classificações das equações diferenciais.

Você deve se lembrar de que uma função matemática pode ter diferentes classificações dependendo de alguns parâmetros que as identifiquem. Por exemplo, as funções polinomiais são classificadas em função do grau atribuído a elas, e dependendo do grau possuem características diferenciadas. Se o grau for igual a um, temos uma função linear que sempre apresenta um zero nos reais, de grau 2, uma função quadrática, que pode ou não apresentar dois zeros nos reais, e assim por diante.

Com as equações diferenciais ocorre o mesmo. Dependendo do parâmetro escolhido para caracterizar a equação, diferentes classificações são obtidas e essas classificações podem influenciar decisivamente a existência de solução

e, caso exista, na forma de resolução das mesmas.

Temos, de uma forma geral, cinco diferentes formas de classificar uma equação diferencial, a saber:

- Classificação quanto ao número de variáveis e da derivada presente na equação;
- Classificação quanto ao número de equações diferenciais;
- Classificação quanto a ordem das derivadas;
- Classificação quanto a existência ou não de solução;
- Classificação quanto a linearidade da equação.

Vejamos detalhadamente cada uma das classificações destacando a forma geral em cada uma das possibilidades.

1.3.1 Classificação quanto ao número de variáveis e o tipo da derivada.

Fazendo novamente uma analogia aos estudos realizados anteriormente, você deve se lembrar de que quando uma função matemática apresenta apenas de uma variável dependente (y) e uma variável independente (x), $y = f(x)$, sua derivada é dita total e depende apenas de x, da forma:

$$y\cdot = \frac{dy}{dx}$$

Contudo, também, existem funções matemáticas que relacionam uma variável dependente (z) com duas variáveis independentes (x e y), $z = f(x,y)$, ou mais, e com isso temos as chamadas derivadas parciais que podem depender de uma ou outra variável independente, da forma:

$$z\cdot = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad z\cdot = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Desta forma, como as equações diferenciais dependem das derivadas, se a equação envolver apenas uma variável independente e derivadas totais, conforme colocado por ZILL e CULLEN (2001), temos uma **Equação Diferencial Ordinária**, que chamaremos muitas vezes de EDO. Nos exemplos 4, 5 e 6 ilustramos algumas equações diferenciais ordinárias:

EXEMPLO

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx}+2y=1$$

Esta equação diferencial é dita ser ordinária pelo fato de conter apenas derivadas totais e depender apenas de *x*.

EXEMPLO

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=5x-2$$

Este exemplo também apresenta uma equação diferencial ordinária, pois não temos a presença de derivadas parciais.

EXEMPLO

Seja a seguinte equação diferencial

$$y\cdot+3y=e^{-5t}$$

Como neste caso também temos apenas derivadas totais, trata–se de uma EDO.

Agora, se a equação diferencial envolver mais de uma variável independente e derivadas parciais, temos uma *Equação Diferencial Parcial*, que podem ser representadas por EDP. Nos exemplos 7 e 8 temos algumas equações diferenciais parciais:

EXEMPLO

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Esta equação diferencial é dita ser parcial, pois depende de duas variáveis independentes e contém derivadas parciais.

EXEMPLO

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 5\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

É uma equação diferencial parcial pelo fato de contar derivadas parciais e depender de mais de uma variável independente, *x* e *t.*

O objetivo da disciplina é estudar todas as propriedades e métodos de resolução das equações diferenciais ordinárias e não serão abordadas as equações diferenciais parciais na disciplina.

CONEXÃO

As equações diferenciais parciais ocorrem quando a equação diferencial contém mais de uma variável independente e derivadas parciais dessas variáveis. Recomendamos que leia as referências abaixo para ampliar seus conhecimentos sobre as equações diferenciais parciais:
http://www.mat.ufmg.br/~lima/apostilas/EDP1–aulas–22–8–13.pdf
http://www.im.ufrj.br/~medeiros/LinkedDocuments/livrometclassicos.pdf
Você pode também assistir aos vídeos produzidos pela IMPA sobre esse assunto:
http://video.impa.br/index.php?page=doutorado–2013–equacoes–diferenciais–parciais-–e–aplicacoes

1.3.2 Classificação quanto ao número de equações diferenciais.

Da mesma forma como ocorre com as equações, existem cenários onde são necessárias mais de uma equação ou mais de uma função para caracterizar o problema, o que provoca uma mudança de uma equação para um sistema de equações.

Com as equações diferenciais ocorre da mesma forma. Podemos trabalhar com apenas uma equação diferencial, como no caso dos exemplos de 1 a 5, ou então, devido à necessidade de trabalhar com duas ou mais funções, como definido por BOYCE e DiPRIMA (2014), termos um sistema de equações diferenciais, como o exibido no exemplo 9.

EXEMPLO

Em uma situação prática qualquer foram definidas duas equações diferencias, gerando um sistema de equações diferenciais, da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = 5x + 4xy \\ \dfrac{dx}{dz} = y - 2xy \end{cases}$$

Na disciplina de Cálculo III limitaremos nossa abordagem aos casos de uma única equação diferencial, mas você pode consultar a referência recomendada para saber mais sobre os sistemas de equações diferenciais.

CONEXÃO

Os sistemas de equações diferenciais ocorrem quando temos duas ou mais equações diferenciais sendo trabalhadas de forma simultânea. Recomendamos que leia as referências abaixo para ampliar seus conhecimentos sobre os sistemas de equações diferenciais:

http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/sourceforge/pngtest.php

http://www.ime.uerj.br/~calculo/LivroIV/sistemas.pdf

http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/sem1_05/edo/farlow/sec7.pdf

1.3.3 Classificação quanto a ordem das derivadas.

Essa classificação é feita de forma similar a classificação dos polinômios, ou seja, o grau mais elevado de uma variável em um polinômio caracteriza a ordem do mesmo. Por exemplo, o polinômio $P(x)=4x^5+7x^4-2x^2$ é de ordem 5, ou de quinto grau, já que o maior grau da variável x é 5.

Para uma equação diferencial, basta examinarmos qual a derivada de maior ordem envolvida na equação, e teremos o grau da equação diferencial, como apresentado em EDWARDS e PENNEY (1995).

Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO

Qual a ordem da equação diferencial abaixo?

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 2e^x + \frac{d^2y}{dt^2}$$

Como a derivada de maior grau é $\frac{d^3y}{dt^3}$, a equação diferencial é de ordem 3, ou de terceira ordem.

EXEMPLO

Qual a ordem da equação diferencial abaixo?

$$y'\,y + 2y - 6xy = 10$$

Como a derivada de maior grau é y', a equação diferencial é de ordem 1, ou de primeira ordem.

EXEMPLO

Qual a ordem da equação diferencial abaixo?

$$e^t \cdot \frac{dy}{dt} + ay \cdot e^{at} - e^{at}g(t)$$

Como a derivada de maior grau é $\frac{dy}{dt}$, a equação diferencial é de ordem 1, ou de primeira ordem.

Resumidamente, na tabela 1 temos a seguinte as seguintes relações de ordem das equações diferenciais e o respectivo grau, que está associado ao expoente da derivada de maior grau tomando a equação diferencial na forma de um polinômio.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL	ORDEM	GRAU
$y' = 2x^2y$	1	1
$y'' = 2y + sen(x)$	2	1
$y''' = y(x + 1)$	3	1
$(y')^2 + x.cos(y) = 0$	1	2
$(y'')^2 + 5xy = 0$	2	2
$(y''')^2 + 3y' + 2y = e^x$	3	2
$(y')^3 + x.e^x = 0$	1	3
$(y'')^3 + 6xy' = 0$	2	3
$(y''')^3 + y'' + 2y' = e^x$	3	3

Tabela 1 – Ordem e grau de equações diferenciais.

1.3.4 Classificação quanto a existência de solução.

Você pode observar nos exemplos 1, 2 e 3 que trabalhar com equações diferenciais envolve a resolução de integrais, e no caso dos exemplos, de forma direta. Notou ainda que temos dois tipos de soluções, uma solução geral e uma solução parcial, obtido mediante uma condição prévia.

- Assim, como para as equações reais, para as equações diferenciais podemos ter duas situações, equações diferenciais com solução e equações diferenciais que não possuem soluções.

O grande problema em trabalhar as soluções de equações diferenciais é o grau de complexidade da mesma que pode exigir um esforço significativo na resolução. Contudo, existe um elemento importante neste contexto, caso você obtenha uma solução, não é difícil verificar se a mesma é correta ou não, como mostrado nos exemplos anteriores.

É particularmente saudável que você se acostume a fazer a verificação para se certificar que a solução é de fato verdadeira. Lembre–se, determinada a solução, basta derivar o resultado e verificar se corresponde a equação original.

Ainda, existe outra maneira de trabalhar com equações diferenciais que pode auxiliar nos casos mais simples. Não é uma técnica muito eficiente, mas é simples, como explicitado em BOYCE e DiPRIMA (2014). Consiste em sugerir uma solução geral através da observação da própria equação diferencial. Vejamos dois exemplos.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

Será que a função y = e^x é uma solução para essa equação diferencial?

Para avaliar a questão, basta substituir na equação diferencial e realizar os cálculos necessários:

$$\frac{d^2(e^x)}{dx^2} - e^x = 0$$

$$\frac{d(e^x)}{dx} - e^x = 0$$

$$e^x - e^x = 0$$

Assim, a função $y=e^x$ é uma solução, assim como a função $y = e^{-x}$, também, é uma solução. Desta forma, as funções $y = Ce^x$ e $y = Ce^{-x}$ também são soluções gerais, ou seja, temos uma família de soluções para a equação diferencial.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Será que a função y = sen x é uma solução para essa equação diferencial?

Substituindo, temos:

$$\frac{d^2(sen\ x)}{dx^2} + sen\ x = 0$$

$$\frac{d\ cos\ x}{dx} + sen\ x = 0$$

$$-sen\ x + sen\ x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Assim, a função y = senx é uma solução, assim como a função y = −cosx , também, é uma solução. Desta forma, as funções y = C · (sen x) e y=C · (− cos x) são soluções gerais da equação diferencial.

1.3.5 Classificação quanto a linearidade da equação.

A linearidade de uma equação diferencial, fator extremamente relevante para a seleção de técnicas de resolução, está relacionada à forma como as variáveis e as derivadas se associam na equação. Simplificadamente, sempre que *y* estiver multiplicando *dy*, ou *y* se apresentar não linear, a equação diferencial é não linear, mas se *y* e *dy* estiverem em forma somativa com *y* linear, a equação diferencial será linear. Vejamos um exemplo de cada tipo.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial abaixo:

$$4\frac{d^3y}{dm^3} + 5y = 10$$

É uma equação diferencial linear, pois não temos o produto da variável dependente *y* pela sua derivada e *y* aparece na forma linear com expoente igual a 1.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial abaixo:

$$y.y'' - y' + sen(yt) = 15$$

É uma equação diferencial não linear por dois motivos, a ocorrência do produto *y.y''* e pelo fato de *y* estar associada a uma função não linear (seno).

Bem, neste primeiro capítulo nos concentramos em fazer uma apresentação dos conceitos de uma equação diferencial, bem como dar os primeiros passos para a resolução das mesmas.

Ainda, e igualmente importante, discutimos os elementos que utilizamos para classificar essas equações, especialmente a ordem e a linearidade das mesmas.

Para finalizar a apresentação das equações diferenciais, é importante mencionar que o estudo das soluções de uma equação diferencial de primeira ordem pode ser feito através de campos de direção. Conforme colocado por BOYCE e DiPRIMA (2014) os campos de direção são construídos calculando–se o valor da função para uma grande variação das variáveis e dispondo os resultados em um plano cartesiano, criando assim uma malha que possibilita avaliar o comportamento da função e da equação diferencial. Como depende de muitos cálculos, a construção é feita computacionalmente.

EXEMPLO

Supondo a equação diferencial y'= 6xy + 3x. O campo de direções associado a equação diferencial fica como ilustrado na figura
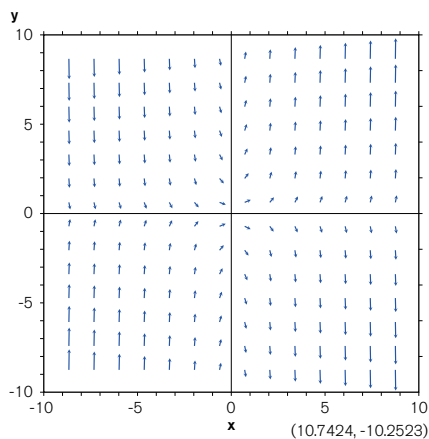
Figura 1.4 – Saída do aplicativo Máxima com o Campo de direções da equação diferencial do exemplo17.

Os campos de direção podem ser construídos a partir do aplicativo livre Máxima, que pode ser obtido a partir do seguinte endereço:

http://br.ccm.net/download/baixaki–2168–maxima

Para a utilização do mesmo recomendamos a leitura dos seguintes materiais:

www.ime.unicamp.br/~marcio/ss2006/grupo10.pdf

www.sobralmatematica.org/monografias/milsangela.pdf

No capítulo 2 iniciaremos as técnicas, as principais pelo menos, existentes para a resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, EDO de primeira ordem, mas antes, vejamos alguns exemplos ilustrativos que originam as equações diferenciais.

1.4 Situações práticas modeladas via equações diferenciais.

Antes de iniciarmos a discussão sobre os métodos de resolução, vamos, a título de ilustração, discutir três situações práticas que podem ser representadas por meio de uma equação diferencial.

EXEMPLO

[*Adaptado de EDWARDS JR e PENNEY (1995)*]. Suponhamos que você acenda o forno do fogão que existe na cozinha de sua casa e coloque, em seu interior, uma assadeira de alumínio e a deixe por lá tempo suficiente para atingir uma temperatura elevada. Ao retirar a assadeira do forno e colocá–la sobre uma superfície qualquer dentro da cozinha, o que ocorrerá com a assadeira? Se você está pensando que a assadeira deixará de ficar quente e passará para um estado mais frio, está com a razão. Na verdade, a assadeira está em um processo de resfriamento, troca de temperatura com o ambiente e com a superfície.

Se considerarmos que o ambiente possui uma temperatura T_a, igual em qualquer ponto do ambiente, e que o objeto, a assadeira, também possui uma temperatura, T_{ob}, constante ao longo de todo o objeto, e levando em consideração que $T_a < T_{ob}$, temos, então, que com a variação do tempo t, existe uma perda de calor do objeto para o ambiente que ocorre em função do tipo do material do objeto.

Assim, podemos considerar que a taxa de variação da temperatura da assadeira, T_{ob}, em função do tempo *t* é uma função da diferença entre a temperatura da assadeira e a temperatura do ambiente ($T_{ob} - T_a$), e essa diferença, o decaimento da temperatura, a troca de calor, ocorre de forma ponderada pelas propriedades físicas do material. Chamando de α a constante que relacionada o comportamento do tipo de material da assadeira, alumínio, por exemplo, podemos representar a situação através de uma equação diferencial (considerando o sinal negativo pelo fato de ser uma perda de calor por parte da assadeira):

$$\frac{dT_{ob}}{dt} = -\alpha \cdot \left(T_{ob} - T_a\right)$$

EXEMPLO

[*Adaptado de ZILL e CULLEN (2001)*] Estudos relacionados a planejamento urbano, impactos ambientais, entre outros dependem fundamentalmente da projeção de crescimento da população que ocupa a área geográfica em questão. Situações que envolvem crescimento populacional, não necessariamente humana, possuem uma característica peculiar, a presença de fatores que tendem a desacelerar o ritmo de crescimento, como predadores da população. Em relação a população humana, não temos predadores, mas temos epidemias, violência urbana e acidentes de larga escala que funcionam como tal.

Dessa forma, suponhamos que em uma dada população, com uma quantidade inicial de P pessoas, a taxa de variação da população em função do tempo é proporcional a população atual, ou seja, quanto maior a população, a taxa de crescimento tende a ser maior também, de forma proporcional.

Contudo, é importante considerar que a população também apresenta uma taxa de decaimento provocada pelos fatores de desaceleração. Suponhamos que nessa população ocorra uma epidemia de dengue e que W indivíduos contraiam a doença e que (P–W) não. Assim, a taxa de crescimento da população doentes será proporcional a uma relação ponderada entre os doentes e os não doentes, da forma:

$$\frac{dW}{dt} = k \cdot W \cdot \left(P - W\right)$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade.

EXEMPLO

[*Adaptado de BOYCE e DiPRIMA (2014)*] Do alto de um prédio de altura H_0, um objeto é lançado em direção ao solo. Assim, como podemos descrever a queda desse objeto em função do tempo? Bem, para representar o problema de uma forma simplificada, podemos supor inicialmente que o objeto possua uma massa m que permanece constante ao longo de toda a queda; em segundo lugar, podemos supor que a queda do objeto não seja afetada pela resistência do ar, mas apenas pela ação da gravidade *g*. Ainda, é importante lembrar que a ação da gravidade age acelerando a queda do objeto, mas a aceleração é uma derivada da velocidade que por sua vez é uma derivada do deslocamento. Assim, temos duas derivadas envolvidas na representação da queda do objeto, que pode ser representada por uma equação diferencial da forma:

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -g$$

Neste momento, antes de prosseguir para o capítulo 2 e iniciar os estudos das técnicas de resolução de uma EDO de ordem 1, convidamos você a resolver os exercícios abaixo que têm o intuito de reforçar alguns conceitos trabalhados neste capítulo. A resolução detalhada dos mesmos você encontrará no final dos exercícios propostos.

ATIVIDADES

01. Resolva as equações diferenciais dadas abaixo, encontrando a sua solução geral, verificando a veracidade da mesma e obtendo a solução particular em função da condição informada.

a) $\frac{dy}{dx} + 3 = sen2x$, com y(0) = 3.

b) $y' = xe^x$, com y(0) = 1.

c) $cos^{-1}xy' = \frac{sen\ x}{4}$, com y(0) = 2.

02. Classifique cada uma das equações diferenciais abaixo quanto ao seu grau

a) $x^2y'' + xy' + 7xy = Ln(x+1)$

b) $\frac{dy}{dv} \cdot (2v+1) + \frac{d^3y}{dv^3}(e^{2v}) = 1$

c) y' + 3y = 5

03. Classifique as equações diferenciais em lineares ou não lineares.

a) $y''' + (x-1)y'' + \sqrt{y(x-1)} = 4$

b) $\frac{d^3t}{dt^3} + e^{3x} = \cos x$

c) $xy'' + xy + 3y = e^x$

04. Resolva a equação diferencial 2y' + y = 0 e represente graficamente a solução geral para C igual a 5 e 10.

REFLEXÃO

Você deve ter notado que trabalhamos com equações diferenciais de primeira ordem e todos os exercícios foram resolvidos da mesma forma, utilizando integrais indefinidas. Contudo, podemos refletir sobre o seguinte: se existem diferentes classificações para as equações diferenciais e diferentes formas da equação ser representada, será que podemos utilizar essas particularidades para obter formas diferenciadas e talvez mais simples de resolver uma equação diferencial?

CONCEITO

Alguns termos citados neste capítulo são de especial importância e aparecerão nos capítulos futuros, sendo assim reforçamos seus conceitos neste glossário.

1. **Equações diferenciais**: são equações especiais que unem, na mesma sentença, uma função matemática, suas variáveis e suas derivadas;

2. **Equações diferenciais de primeira ordem**: são equações diferenciais que contém apenas derivadas de primeira ordem na sua formulação;

3. **Equações diferenciais de segunda ordem**: são equações diferenciais onde a derivada de ordem mais alta é a derivada de segunda ordem;

4. **Equações diferenciais ordinárias:** são equações cuja função desconhecida depende de apenas de uma variável.

5. **Equações diferenciais parciais:** são aquelas equações cuja função desconhecida depende de mais de uma variável.

6. **Solução geral de uma equação diferencial**: é a solução obtida com a resolução inicial da equação diferencial e que contém a constante de integração;

7. **Solução particular de uma equação diferencial**: é a solução obtida atribuindo um valor para a constante de integração, geralmente calculado através de uma condição inicial.

LEITURA

Para se aprofundar nos conceitos de equações diferenciais, suas classificações e aplicações, recomendamos que você leia as obras listadas nas referências bibliográficas do capítulo, em especial:

BASSANEZI, R.C. Equações Diferenciais Ordinárias – Um Curso Introdutório. Coleção BC&T – Textos Didáticos – Volume 1 – Universidade Federal do ABC. Capítulos 1 e 2. Disponível em: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/iedo/notasdeaulas/equacoes–diferenciais–ordinrias–rodney.pdf [Acessado em 26/05/2015]

BOYCE, W.E e DiPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 9ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. [*Ler o capítulo 1*]

DIACU, Florin. Introdução a Equações Diferenciais – Teoria e Aplicações. LTC: Rio de Janeiro. 2004. [*Ler o capítulo 1, páginas 01 – 12*]

EDWARDS JR, C.H. e PENNEY, D.E. Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Prentice–Hall do Brasil, 1995. [*Ler o capítulo 1, páginas 02–15*]

NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. Equações Diferenciais. 8 ed. Pearson: São Paulo. 2012. [*Ler o capítulo 1, páginas 01–19*]

ROSA, M.S.R. Equações Diferenciais. Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009. Capítulo 1. Disponível em: http://www.dma.im.ufrj.br/~rrosa/dvifiles/apostila–ed.pdf [Acessado em 26/05/2015]

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. Equações Diferenciais. Volume 1. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001. [*Ler o capítulo 1*].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W.E e DiPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

EDWARDS JR, C.H. e PENNEY, D.E. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno**. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Prentice–Hall do Brasil, 1995.

ZILL, D.G Equações **Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Thompson Pioneira, 2003.

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. Volume 1. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

2

Métodos de Resolução de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Neste segundo capítulo vamos discutir as principais técnicas de resolução das equações diferenciais ordinárias, EDO, de primeira ordem, detalhar cada caso particular e como proceder em cada um.

OBJETIVOS

- Entender o processo de resolução de uma EDO de ordem 1 via variáveis separáveis.
- Entender o processo de resolução de uma EDO de ordem 1 via equações homogêneas.
- Entender o processo de resolução de uma EDO de ordem 1 via equações exatas.
- Entender o processo de resolução de uma EDO de ordem 1 via equações lineares.

2.1 Considerações iniciais

Antes de partir para técnicas particulares de resolução de equações diferenciais de primeira ordem com condições especiais, é importante discutir alguns pontos.

Primeiro, será que podemos garantir a existência de solução de uma equação diferencial? Melhor ainda, será que podemos garantir de essa solução é única?

Sim, podemos, isso graças a um teorema enunciado e provado por Charles Émile Picard (1856-1941), de acordo com ZILL e CULLEN (2001), que associa a existência de uma única solução a continuidade das funções e de suas derivadas a existência de uma região R no plano. Não vamos verificar tais condições nos casos discutidos neste livro, mas não é difícil avaliar a continuidade das funções e de suas derivadas, nem tampouco determinar uma região R válida de acordo com o comportamento das variáveis. Apenas a título de melhor entendimento do teorema, vejamos um exemplo de como obter a região R.

> Teorema da existência de uma única solução: Charles Émile Picard (1856-1941)
>
> Seja *R* uma região retangular no plano *xy* definida por $a \le x \le b$ e $c \le y \le d$ que contém um ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se *f(x,y)* e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em *R*, então existe um intervalo *I* centrado em x_0 e uma única solução *y(x)* definida em *I* que satisfaz o problema de valor inicial.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$

Neste caso temos que $f(x,y) = \sqrt{y}$, que será contínua para qualquer número real x e para qualquer valor de $y \ge 0$. Calculando a derivada parcial de f(x, y) em relação a y, temos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial y} = \frac{3}{2}\sqrt{y^3}$$

Da mesma forma, a derivada parcial será contínua para qualquer x pertencente aos reais e para valores não negativos de y. Assim $R = \{x \in R \text{ e } y \in R^+\}$

Bem, é oportuno enfatizar que o teorema citado anteriormente é importante no sentido de tranquilizar os usuários de equações diferenciais no sentido de garantir que existirá uma solução única dada uma condição inicial para o problema, mas infelizmente o teorema não garante que a descoberta de tal solução será simples. Ainda, não nos orienta como chegar até ela.

É por isso que na evolução histórica do estudo das equações diferenciais foram construídos muitos modelos de resolução, conforme discutido em BOYCE e DiPRIMA (2014), baseados em características particulares das equações, ou seja, dependendo da forma como a equação é apresentada, temos um, ou em alguns casos mais de um, procedimento padrão para sua resolução.

Preparado? Vamos lá, então! Começaremos com uma família de equações diferenciais chamada de EDO de Variáveis Separáveis.

2.2 Método das Variáveis Separáveis

Para melhor compreensão do método das variáveis separáveis, vamos iniciar nossa discussão com uma equação diferencial de primeira ordem bem simples e básica. Acompanhe os exemplos a seguir e procure associar com o discutido no capítulo 1.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$

Note que nesta equação diferencial, temos uma função que depende apenas da variável x, e com isso é simples isolar de um lado da igualdade apenas termos associados a y e do outro lado termos associados apenas a variável x, da forma:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \Rightarrow 1 \cdot dy = \sqrt{x} \cdot dx$$

Como cada lado depende de apenas uma variável, é fácil resolver a equação diferencial, encontrar a sua solução geral, utilizando diretamente integrais, da forma:

$$\int 1 \cdot dy = \int \sqrt{x} \cdot dx$$

$$y + C_1 = \int x^{1/2} \cdot dx$$

$$y + C_1 = \frac{2}{3}x^{3/2} + C_2$$

$$y + C_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C_2$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C_2 - C_1$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

EXEMPLO

Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y}$. Resolvendo de maneira similar ao exemplo1, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y} \Rightarrow 2yvdy = x^2 \cdot dx$$

$$\int 2y \cdot dy = \int x^2 \cdot dx$$

$$y^2 + C_1 = \frac{1}{3}x^3 + C_2$$

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}$$

É possível notar que nos dois exemplos foi possível separar uma função que depende apenas de *x* junto com a diferencial *dx* da variável *y* que ficou junto com a diferencial *dy*, favorecendo o uso direto das integrais.

Essa família de EQO de primeira ordem são solucionadas, portanto, pela técnica de Separação de Variáveis.

Segundo ZILL e CULLEN (2001), sempre que for possível separar as variáveis x e y em funções *h(y)* e *g(x)* de forma que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

a equação diferencial é separável ou tem suas variáveis separáveis, e a solução geral será igual a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$
$$h(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx$$
$$\int h(y) \cdot dy + C_1 = \int g(x) \cdot dx + C_2$$

Assim, obtemos a solução geral para o caso de variáveis separáveis:

$$\int h(y) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx + C$$

onde $C = C_1 + C_2$.

Assim, se a equação diferencial for de variáveis separáveis, basta identificar as funções *h(y)* e *g(x)* e substituir na solução geral.

EXEMPLO

Resolva a equação diferencial $e^y y' = \cos x$

Podemos representar a equação diferencial da seguinte forma:

$$e^y \frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow e^y dy = \cos x \, dx$$

É imediato notar que $h(y) = e^y$ e que $g(x) = \cos x$, assim a solução geral será:

$$\int e^y \cdot dy = \int \cos x \cdot dx + C$$
$$e^y = \operatorname{sen} x + C$$

EXEMPLO

Resolva a equação diferencial $x^2 y \cdot \frac{dy}{dx} - 2xy^2 = 0$.

De início, vamos determinar as funções h(y) e g(x). Passando um dos termos para o lado direito da igualdade e passando dx multiplicando, temos:

$$x^2 y \cdot \frac{dy}{dx} - 2xy^2 = 0$$
$$x^2 y \cdot dy = 2xy^2 \cdot dx$$

Note que para gerar a função *h(y)* temos que dividir o termo à esquerda por x^2 e para gerar a função *g(x)* temos que dividir o termo à direita por y^2. Desta forma, basta dividir a equação diferencial por x^2y^2:

$$\frac{x^2y}{x^2y^2}\cdot dy=\frac{2xy^2}{x^2y^2}\cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\cdot dy=\frac{2}{x}\cdot dx$$

Assim, chegamos a: $h(y)=\frac{1}{y}$ e $g(x)=\frac{2}{x}$

Então, nota-se que a equação diferencial é de variáveis separáveis e podemos substituir as duas funções encontradas na solução geral, obtendo:

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2}{x}dx+C$$

$$\text{Ln}\,y=2\cdot\text{Ln}\,x+C$$

$$e^{\text{Ln}\,y}=e^{2\cdot\text{Ln}\,x+C}$$

$$y=e^{2.\text{Ln}\,x}\cdot e^{C}$$

Na expressão, como *e* é uma constante (e = 2,72), podemos escrever da forma:

$$y=Ce^{2\cdot\text{Ln}\,x}$$

EXEMPLO

Seja uma EDO de primeira ordem $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ com uma condição inicial y(2) = 1. Resolva via separação de variáveis.

Temos que *h(y)=1/y* e *g(x)=1/x*. Assim:

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx+C$$

$$\text{Ln}\,y=\text{Ln}\,x+C$$

$$e^{\text{Ln}\,y}=e^{\text{Ln}\,x+C}$$

$$y=C\cdot x$$

Com a condição y(2)=1, temos:

$$y=C\cdot x\Rightarrow 1=C\cdot 2\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Assim, a solução particular da EDO é: $y=\frac{x}{2}$

Vejamos um exemplo aplicado envolvendo equações com variáveis separáveis.

EXEMPLO

[*adaptado de BOYCE e DIPRIMA(2014)*]. Um exemplo clássico de aplicação das equações diferenciais é o estudo decaimento radioativo em função do tempo. O decaimento radioativo ocorre quando os núcleos de isótopos instáveis são rompidos por conta da instabilidade atômica. Como ilustração, temos o Urânio, cujo isótopo U-238 é desintegrado até a produção do Tório, cujo isótopo Th-234 é desintegrado até a produção do Protactínio, cujo isótopo Pa-234 é desintegrado até a produção do Chumbo, que é estável e com isso o decaimento encerra. Assim, dependendo do tempo de decaimento, novos isótopos podem ser formados.

Para representar o decaimento radioativo de uma quantidade inicial Q em função do tempo t, temos a seguinte representação diferencial:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q(t)$$

Assim, suponhamos um determinado isótopo que no início do processo de decaimento (*t=0*) tinha massa igual a *Q=500g* e que após 10 minutos (*t=10*) sofreu uma redução de 15% em sua massa (*Q=425g*). Considerando tais condições iniciais, qual a equação que determina a massa do isótopo em um tempo qualquer?

Vamos inicialmente encontrar a solução geral da equação diferencial, utilizando a técnica de separação das variáveis.

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q$$
$$\frac{dQ}{Q} = -k \cdot dt$$
$$\int \frac{dQ}{Q} = \int -k \cdot dt$$
$$\text{Ln}\, Q = -kt + C$$
$$Q = Ce^{-kt}$$

Para determinar a solução particular, vamos considerar a condição inicial de que a massa *Q* era igual a *500g* com *t=0*.

$$Q = Ce^{-kt} \Rightarrow 500 = Ce^{-k0} \Rightarrow 500 = Ce^{0} \Rightarrow 500 = C$$

Portanto a solução da equação diferencial de decaimento é:

$$Q = 500e^{-kt}$$

Agora, para o isótopo em questão, qual a constante de decaimento *k* Para encontrar o valor de k temos que utilizar a outra condição do problema, uma massa $Q = 425g$ para um tempo $t = 10$. Temos:

$$Q = 500e^{-kt} \Rightarrow 425 = 500e^{-10k} \Rightarrow \frac{425}{500} = e^{-10k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}85 = e^{-10k} \Rightarrow \ln(0{,}85) = -10k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0{,}162518929 = -10k \Rightarrow k = 0{,}0163$$

Assim, temos a solução final igual a: $Q = 500e^{-0{,}0163t}$.

2.3 Método das Equações Homogêneas

Você pode ter notado que se uma equação diferencial ordinária de primeira ordem for separável quanto às variáveis, fica bem facilitada a sua resolução quanto a solução geral, correto?

Sim, mas será que toda EDO de primeira ordem é separável?

Infelizmente não. Mas isso pode não ser exatamente um problema. Existe uma família de EDO de primeira ordem que podem ser reescritas de maneira a serem separáveis. São as equações diferenciais homogêneas.

A homogeneidade da equação diferencial está associada a homogeneidade das funções presentes na equação.

Como ilustrado por ZILL e CULLEN (2001), uma função é homogênea quando satisfaz a seguinte relação: Se uma função $f(x,y)$ satisfaz a relação $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$ é dita ser homogênea de grau n.

EXEMPLO

Seja a função $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 2y^3$.

Substituindo x por tx e y por ty, temos:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 2tx(ty)^2 - 2(ty)^3$$
$$f(tx,ty) = t^3x^3 + 2txt^2y^2 - 2t^3y^3$$
$$f(tx,ty) = t^3x^3 + 2t^3xy^2 - 2t^3y^3$$
$$f(tx,ty) = t^3(x^3 + 2xy^2 - 2y^3)$$

$f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$ e, portanto, é homogênea de grau 3.

EXEMPLO

Seja a função $f(x,y)=x^3+y^3+5.$.

Substituindo x por tx e y por ty, temos:

$$f(tx,ty)=(tx)^3+(ty)^3+5$$

$$f(tx,ty)=t^3x^3+t^3y^3+5$$

$$f(tx,ty)=t^3(x^3+y^3+5/t^3)$$

$f(tx,ty)\neq t^3 f(x,y)$ e portanto não é homogênea.

Sobre as funções homogêneas existe uma forma rápida de avaliar a satisfação da relação. Se a soma dos graus das variáveis de cada termo for sempre o mesmo, a função será homogênea. Note que no exemplo 7, nos três termos a soma dos graus das variáveis é igual a 3 (x^3y^0,x^1y^2 e x^0y^3) e com isso a equação é homogênea de grau 3. Já no exemplo 8, devido a presença da constante 5, nem todos os termos possuem o mesmo grau, portanto não homogênea.

Supondo, então, uma função homogênea, conforme apontado por EDWARDS JR e PENNEY (1995), podemos reescrever a função original em termos de duas novas funções homogêneas, mas de grau zero, da forma:

$$f(x,y)=x^n f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

$$f(x,y)=y^n f\left(\frac{x}{y},1\right)$$

onde n representa o grau de homogeneidade da função.

Com os resultados anteriores e considerando ainda o exposto em ZILL e CULLEN (2001), uma equação diferencial do tipo:

$g(x, y)\,dx + h(x, y)\,dy = 0$

será homogênea se os coeficientes *g* e *h* forem funções homogêneas de mesmo grau e se isso ocorrer significa que a EDO pode ser separada pelas variáveis.

Para encontrar a solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem homogênea pelo método de separação de variável, é necessário fazer uma mudança de variável, que pode ser executada de duas formas diferentes:

Primeira forma: substituir *y* por *ux*, *y=ux*, o que gera como consequência que a diferencial *dy* será obtida pela derivada do produto *ux*, ou seja *dy=u.dx+x.du*.

Segunda forma: substituir *x* por *uy*, *x=uy*, o que gera como consequência que a diferencial *dx* será obtida pela derivada do produto *uy*, ou seja *dx=u.dy+y.du*.

EXEMPLO

Para verificar a validade das formas anteriores, vamos considerar a forma geral de uma equação diferencial homogênea:

$g(x, y)\, dx + h(x, y)\, dy = 0$

Fazendo uso da segunda forma, $x = uy$ e $dx = u \cdot dy + y \cdot du$, temos:

$g(uy, y)(u \cdot dy + y \cdot du) + h(uy, y)dy = 0$

Aplicando os resultados sobre funções homogêneas, podemos transformá-las em novas funções homogêneas de grau zero, da forma:

$g(uy, y) = y^n\, g(u, 1)$

$h(uy, y) = y^n\, h(u, 1)$

Substituindo, temos:

$$y^n g(u,1)(u.dy + y.du) + y^n h(u,1)dy = 0$$
$$y^n [g(u,1)(u.dy + y.du) + h(u,1)dy] = 0$$
$$g(u,1)(u.dy + y.du) + h(u,1)dy = 0$$
$$u.g(u,1)dy + y.g(u,1)du + h(u,1)dy = 0$$
$$[u.g(u,1) + h(u,1)]dy + y.g(u,1)du = 0$$
$$[u.g(u,1) + h(u,1)]dy = -y.g(u,1)du$$
$$-\frac{1}{y}dy = \frac{g(u,1)}{u \cdot g(u,1) + h(u,1)}du$$

Assim a equação diferencial está devidamente separada quanto às variáveis e os resultados discutidos no item 2.1 podem ser aplicados na resolução da EDO. O mesmo resultado pode ser obtido pela primeira forma, como ilustrado por ZILL e CULLEN (2001, p 55).

EXEMPLO

Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy}$ utilizando os conceitos de equação diferencial homogênea.

Vamos verificar a homogeneidade da equação. Temos:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = x^2 y^0 + x^0 y^2$$
$$h(x,y) = x^2 - xy = x^2 y^0 + x^1 y^1$$

Assim, tanto a função g quanto a função h são homogêneas de grau 2.

Fazendo a substituição *y = ux* e escrevendo *dy* como *dy = u · dx + x · du*, temos:

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$$
$$(x^2 + u^2x^2)\cdot dx + (x^2 - x^2u)(u \cdot dx + x \cdot du) = 0$$
$$(x^2 + u^2x^2)\cdot dx + (x^2 - x^2u)u \cdot dx + (x^2 - x^2u)\cdot x \cdot du = 0$$
$$(x^2 + u^2x^2)\cdot dx + (ux^2 - x^2u^2)\cdot dx + (x^3 - x^3u)\cdot du = 0$$
$$(x^2 + u^2x^2 + ux^2 - x^2u^2)\cdot dx + (x^3 - x^3u)\cdot du = 0$$
$$(x^2 + ux^2)\cdot dx + (x^3 - x^3u)\cdot du = 0$$
$$x^2(1+u)\cdot dx + x^3(1-u)\cdot du = 0$$

Dividindo a expressão por x^2, temos:

$(1 + u^2) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0$

Dividindo a expressão por 2u, temos:

$$\frac{(1+u)}{(1-u)}\cdot dx + x \cdot du = 0$$

Multiplicando a expressão por $\frac{2u}{x\cdot(1+u^2)}$ temos:

$$\frac{1}{x}\cdot dx + \frac{(1-u)}{(1+u)}\cdot du = 0$$

Assim, transformamos a equação diferencial original em uma equação diferencial com variáveis separadas, que pode ser resolvida pela técnica discutida no item 2.1.

Utilizando a técnica anterior, temos que integrar ambos os lados, mas note que a integral referente a *u* trará alguma dificuldade. Assim, antes de integrar, vamos reescrever a fração original através de uma alteração por frações parciais, da forma:

$$\frac{(1-u)}{(1+u)} = \frac{A}{(1+u)} + \frac{B}{(1+u)}$$

Para que a igualdade seja verdadeira, é necessário que:

$A + B = 1 - u \Rightarrow A = 1 - u - B$

Supondo B = 2, temos:

$A = 1 - u - B = 1 - u - 2 = -1 - u$

Substituindo na equação original, temos:

$$\frac{1}{x}\cdot dx + \left[\frac{-1-u}{1+u} + \frac{2}{1+u}\right]\cdot du = 0$$
$$\frac{1}{x}\cdot dx + \left[-1 + \frac{2}{1+u}\right]\cdot du = 0$$

Agora fica mais fácil o cálculo das integrais. Prosseguindo com o cálculo, temos:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int 1du + 2\int \frac{1}{1+u}du = 0$$
$$Lnx - u + 2 \cdot Ln(1+u) = C$$
$$-u + Lnx + Ln(1+u)^2 = C$$
$$-u + Ln[x \cdot (1+u)^2] = C$$

Neste momento temos que lembrar a mudança de variável feita no início do problema, ou seja, y = yx, o que significa dizer que $u = \frac{y}{x}$

Assim, temos:

$$-\frac{y}{x} + Ln\left[x \cdot \left(1+\frac{y}{x}\right)^2\right] = C$$
$$-\frac{y}{x} + Ln\left[x \cdot \left(\frac{x+y}{x}\right)^2\right] = C$$
$$-\frac{y}{x} + Ln\left[xv\frac{(x+y)^2}{x^2}\right] = C$$
$$-\frac{y}{x} + Ln\left[\frac{(x+y)^2}{x}\right] = C$$

Supondo ainda que a constante *C* possa ser escrita como *Ln C*, temos:

$$-\frac{y}{x} + Ln\left[\frac{(x+y)^2}{x}\right] = Ln\,C$$
$$Ln\left[\frac{(x+y)^2}{x}\right] - Ln\,C = \frac{y}{x}$$
$$Ln\left[\frac{\frac{(x+y)^2}{x}}{C}\right] = \frac{y}{x}$$
$$Ln\left[\frac{(x+y)^2}{x} \cdot \frac{1}{C}\right] = \frac{y}{x}$$
$$Ln\left[\frac{(x+y)^2}{Cx}\right] = \frac{y}{x}$$
$$\frac{(x+y)^2}{Cx} = e^{\frac{y}{x}}$$

Temos finalmente uma solução geral para a equação diferencial dada por:

$$(x+y)^2 = Cxe^{\frac{y}{x}}$$

2.4 Método das Equações Exatas

O termo equações exatas está relacionado com o comportamento das derivadas de segunda ordem que podemos obter supondo que as funções associadas à equação diferencial sejam do tipo *f(x,y)*.

Para melhor compreensão, vamos retomar a representação de uma equação diferencial conforme exposto no tópico 2.2, ou seja:

$g(x, y)\, dx + h(x, y)\, dy = 0$

A equação diferencial ordinária de primeira ordem será exata se e somente se ocorrer a seguinte igualdade, como explicitado por ZILL e CULLEN (2001):

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$

Independentemente de ser uma equação diferencial separável ou homogênea, o fato de ser exata acaba por indicar um caminho para o cálculo da solução geral da EDO. De acordo com EDWARDS e PENNEY (1995), a solução ocorre em função de um teorema que garante o seguinte resultado:

Se uma equação diferencial de primeira ordem é exata, deve existir uma função f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = g(x,y)$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = h(x,y)$, tendo como solução geral f(x,y)=C, com C uma constante real qualquer.

Vejamos alguns exemplos:

 EXEMPLO

Resolver a seguinte equação diferencial:

$(5y - 2x)\, dx + (5x + 3y^2)\, dy = 0$

Vejamos inicialmente se a equação diferencial é ou não exata. Temos:

$$g(x,y) = 5y - 2x \Rightarrow \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 5$$

$$h(x,y) = 5x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 5$$

Como as derivadas parciais são iguais, a equação diferencial é exata. Sendo assim, deve existir uma função *f(x,y)* tal que inicialmente:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=g(x,y)\Rightarrow\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(5y-2x)\Rightarrow\partial f(x,y)=(5y-2x)dx$$

Calculando a integral em ambos os lados, em relação a *x*, temos:

$$\int\partial f(x,y)dx=\int(5y-2x)dx$$

$f(x, y) = 5xy - x^2 + u(y)$

O aparecimento de uma função *u(y)* é por conta da derivada parcial do lado esquerdo.

Continuando, não podemos esquecer da outra condição, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=h(x,y)$ Contudo, neste caso já temos um resultado parcial para *f(x,y)* e utilizaremos agora, fazendo:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=h(x,y)\Rightarrow\frac{\partial\left(5xy-x^2+u(y)\right)}{\partial y}=5x+3y^2$$

$$5x-0+u'(y)=5x+3y^2\Rightarrow u\ (y)=5x+3y^2-5x+0=3y^2$$

Integrando u'(y) em função de y, temos:

$$u\ (y)=3y^2\Rightarrow\int u\ (y)dy=\int 3y^2dy\Rightarrow u(y)=y^3+C_1$$

Bem, pense um pouco, o que fazer com o valor de *u(y)* Se você pensou em substituir na expressão anterior de *f(x,y),* está com razão, é exatamente isso que devemos fazer:

$$f(x,y)=5xy-x^2+u(y)\Rightarrow f(x,y)=5xy-x^2+y^3+C_1$$

Pergunta: essa é a solução geral da equação? Não, não é. Retornando ao conceito de equações exatas, deve existir uma função *f(x,y)* que satisfaz as condições anteriores e dada essa função, a solução geral é da forma *f(x,y)=C*. Assim, escrevemos a solução como colocado abaixo:

$$C=5xy-x^2+y^3+C_1$$

$$5xy-x^2+y^3-C=0$$

Se desejar verificar se a solução está correta, basta derivar a *f(x,y)* em relação a cada variável e verificar se retorna para as funções *g* e *h*, da forma:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(5xy-x^2+y^3+C_1\right)}{\partial x}=5y-2x+0=5y-2x=g(x,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(5xy-x^2+y^3+C_1\right)}{\partial y}=5x-0+3y^2=5x+3y^2=h(x,y)$$

Portanto a solução está correta.

EXEMPLO

Resolver a seguinte equação diferencial: $y' = \frac{-2xy^3 - 4}{3x^2y^2 - 2}$

Reescrevendo temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 - 4}{3x^2y^2 - 2} \Rightarrow \left(3x^2y^2 - 2\right)dy = \left(-2xy^3 - 4\right)dx$$

Colocando na forma inicial, ficamos com:

$$\left(3x^2y^2 - 2\right)dy + \left(2xy^3 + 4\right)dx = 0$$

Vejamos inicialmente se a equação diferencial é ou não exata. Temos:

$$g(x,y) = 2xy^3 + 4 \Rightarrow \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 6xy^2$$

$$h(x,y) = 3x^2y^2 - 2 \Rightarrow \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 6xy^2$$

Como as derivadas parciais são iguais, a equação diferencial é exata. Sendo assim, deve existir uma função *f(x,y)* tal que inicialmente:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = g(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^3 + 4 \Rightarrow \partial f(x,y) = \left(2xy^3 + 4\right)dx$$

Calculando a integral em ambos os lados, em relação a *x*, temos:

$$f(x,y) = \int \left(2xy^3 + 4\right)dx$$

$$f(x,y) = x^2y^3 + 4x + u(y)$$

Fazendo agora:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = h(x,y) \Rightarrow \frac{\partial\left(x^2y^3 + 4x + u(y)\right)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 2$$

$$3x^2y^2 + 0 + u'(y) = 3x^2y^2 - 2 \Rightarrow u\,(y) = 3x^2y^2 - 2 + 3x^2y^2 + 0 = -2$$

Integrando *u'(y)* em função de *y*, temos:

$$u\,(y) = -2 \Rightarrow \int u\,(y)dy = \int -2dy \Rightarrow u(y) = -2y + C_1$$

Bem, pense um pouco, o que fazer com o valor de *u(y)*? Se você pensou em substituir na expressão anterior de *f(x,y),* está com razão, é exatamente isso que devemos fazer:

$$f(x,y)=x^2y^3+4x+u(y)\Rightarrow f(x,y)=x^2y^3+4x-2y+C_1$$

Assim, escrevemos a solução como colocado abaixo:

$$C=x^2y^3+4x-2y+C_1$$
$$x^2y^3+4x-2y-C=0$$

2.5 Método das Equações Lineares.

Como definido no capítulo 1, classificamos uma equação diferencial como linear se todos os coeficientes das derivadas são funções apenas da variável independente *x*, e ao mesmo tempo a variável dependente *y* e suas derivadas sejam de primeira ordem.

Como apresentado por ZILL e CULLEN (2001), uma equação diferencial linear pode ser representada de maneira geral pela seguinte expressão:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Dividindo a equação diferencial em sua forma geral por $a_1(x)$ temos uma maneira mais simplificada de representar uma EDO linear:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Nesta representação, as funções *P(x)* e *f(x)* são contínuas em uma dada região, lineares e dependentes apenas de *x*. Ainda, podemos reescrever a equação diferencial da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$
$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y+f(x)$$
$$dy=\left[-P(x)y+f(x)\right]dx$$
$$dy+\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0$$

Como afirmado em ZILL e CULLEN (2001), se a equação diferencial é linear, como a colocada anteriormente, é possível determinar uma função $\mu(x)$ que seja um coeficiente dos dois termos da equação diferencial de maneira a não modificar a igualdade, ou seja:

$$\mu(x)\cdot dy+\mu(x)\cdot\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0$$

Note que, representada desta forma, temos uma equação diferencial exata e vale o seguinte resultado:

$$\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\frac{\partial\left\{\mu(x)\left[P(x)y-f(x)\right]\right\}}{\partial y}$$
$$\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\frac{\partial\left[\mu(x)P(x)y\right]}{\partial y}-\frac{\partial\left[\mu(x)f(x)\right]}{\partial y}$$
$$\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)P(x)-0$$
$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=P(x)dx$$

Note que saímos de uma equação diferencial linear para uma equação diferencial exata e no final em uma equação diferencial separável. Aplicando a integral dos dois lados, temos:

$$\int\frac{1}{\mu(x)}d\mu=\int P(x)dx$$
$$\operatorname{Ln}\mu(x)+C_1=\int P(x)dx$$
$$\operatorname{Ln}\mu(x)=\int P(x)dx-C_1$$

Como não conhecemos a função P, a integral do lado direito não tem como ser resolvida, mas isso não impede de determinarmos a forma final para a função u (x):

$$e^{Ln\,\mu(x)} = e^{\int P(x)dx - C_1}$$

$$\mu(x) = C \cdot e^{\int P(x)dx}$$

Assim, a função u (x) representa o **Fator de Integração** da equação diferencial e, como bem explicado em ZILL e CULLEN (2001), a constante *C* não afeta o resultado final. Assim, podemos escrever o fator integrante u (x) da forma:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Você deve estar se perguntando, qual a importância do fator de integração?

A importância é que se multiplicarmos a equação diferencial linear por u (x), teremos como resultado uma equação separável e integrável diretamente, por isso o nome fator de integração.

Para utilizar o fator de integração, basta identificar a função *P(x)*.

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial $xy' - 3y = x^5e^x$.

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$x\frac{dy}{dx} - 3y = x^5e^x$$

Dividindo a equação por x:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = \frac{x^5e^x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4e^x$$

Note que a equação diferencial já está na forma padrão de uma equação linear e é possível verificar que $P(x) = -\frac{3}{x}$ o que resulta no seguinte fator integrador:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\int \frac{dx}{x}} = e^{-3Ln(x)} = e^{Lnx^{-3}} = x^{-3}$$

De posse do fator integrador, multiplicamos na equação diferencial:

$$x^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}yx^{-3}=x^{-3}x^{4}e^{x}$$
$$x^{-3}\frac{dy}{dx}-3yx^{-4}=xe^{x}$$

Note que o termo do lado esquerdo pode ser escrito como a derivada do produto entre y e u(x) em relação a x, ou seja:

$$x^{-3}\frac{dy}{dx}-3yx^{-4}=\frac{d\left(yx^{-3}\right)}{dx}$$

Assim, ficamos com:

$$\frac{d\left(yx^{-3}\right)}{dx}=xe^{x}$$

Integrando dos dois lados,

$$yx^{-3}=\int xe^{x}dx$$

Resolvendo a integral do lado direito por partes, temos:

$$u=x\Rightarrow du=dx$$
$$dv=e^{x}dx\Rightarrow v=e^{x}$$
$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$
$$\int x\cdot e^{x}dx=x\cdot e^{x}-\int e^{x}\cdot dx\int x\cdot e^{x}dx=x\cdot e^{x}-(e^{x}+C)$$

Assim, a solução geral da equação diferencial será:

$$yx^{-3}=x\cdot e^{x}-e^{x}-C$$

Dividindo a expressão por x^{-3}:

$$y=x^{4}\cdot e^{x}-x^{3}e^{x}-x^{3}C$$
$$y=x^{4}\cdot e^{x}-x^{3}(e^{x}-C)$$

Que é a solução geral da equação diferencial

EXEMPLO

[Adaptado de BOYCE e DiPRIMA (2014)] Suponha um corpo de massa *m*, posicionado no alto de uma torre, em repouso. Se esse corpo cair em uma trajetória ortogonal ao solo, sendo afetado de forma positiva pela ação da gravidade *g* e de forma negativa por uma força resistiva proporcional a sua velocidade *v* de queda, determine uma expressão que aponte a velocidade de queda em função do tempo *t*.

Bem, temos duas forças atuando sobre o corpo. Uma força positiva $F_1 = m.g$ que contribui para a aceleração do corpo no sentido do solo e uma outra força $F_2 = k.v$ que desacelera a queda em função da resistência encontrada na trajetória, onde *k* é uma constante. Pela segunda lei de Newton, a somatória das forças F_1 e F_2 é igual ao produto da massa *m* do corpo pela sua aceleração, e a aceleração por sua vez é a derivada da velocidade *v* pelo tempo *t*. Assim, temos a seguinte equação diferencial:

$$m \cdot g - k \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + k \cdot v = m \cdot g$$

Dividindo por m, ficamos com:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = g$$

Observe que a forma final da equação diferencial está linearizada e a função $P(t) = \frac{k}{m}$ e, portanto o fator integrador será:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m} \int dt} = e^{\frac{k}{m} t}$$

Multiplicando na equação diferencial, temos:

$$e^{\frac{k}{m} t} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{k}{m} t} \frac{k}{m} \cdot v = g e^{\frac{k}{m} t}$$

Note que o lado esquerdo pode ser escrito como a derivada $\dfrac{d\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right)}{dv}$

A equação diferencial passa a ser escrita como:

$$\frac{d\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right)}{dv} = ge^{\frac{k}{m}t}dt$$

Integrando dos dois lados, temos:

$$ve^{\frac{k}{m}t} = \int ge^{\frac{k}{m}t}dt$$

$$ve^{\frac{k}{m}t} = g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C$$

Dividindo por $e^{\frac{k}{m}t}$:

$$v = g\frac{m}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Agora, você deve lembrar que no instante t=0 o corpo estava em repouso (v=0). Assim:

$$0 = g\frac{m}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}.0} \Rightarrow 0 = g\frac{m}{k} + C \Rightarrow C = -g\frac{m}{k}$$

Substituindo o valor da constante na equação diferencial, temos a solução geral procurada para a velocidade da queda do corpo em função do tempo, dada por:

$$v = g\frac{m}{k} - g\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = g\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

CONEXÃO

O estudo das técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem realizado neste capítulo não leva em consideração a ocorrência de equações especiais ou particulares. As técnicas procuram identificar características que levem a um procedimento de resolução, que se aplique a qualquer equações com as mesmas características (separáveis, homogêneas, exatas ou lineares). Contudo, existem algumas equações diferenciais bem específicas que possuem métodos próprios de resolução, como as equações diferenciais de Jacques Bernoulli (1654-1705), as equações de Jacob Ricatti (1676-1754) e também de Alex Clairaut (1713-1765). Recomendamos que leia a referência abaixo para ampliar seus conhecimentos sobre essas equações diferenciais:
http://www.feg.unesp.br/~ernesto/guiaedo/Tcc.pdf
Ver capítulo 2, páginas 26 a 32.

CONEXÃO

Da discussão realizada no capítulo, você deve ter percebido que em alguns casos é possível fazer uma transformação na equação diferencial original a fim de coloca-las em um padrão que atenda a uma determinada técnica de resolução. Para saber mais sobre as transformações e ou substituições para simplificar a solução de uma EDO, recomendamos que leia a referência abaixo e assista ao vídeo indicado para ampliar seus conhecimentos sobre o uso de substituições na resolução de EDO de primeira ordem:
http://www.feg.unesp.br/~ernesto/guiaedo/Tcc.pdf [Ver capítulo 2, páginas 10 a 14].
Vídeo parte 1:
https://www.youtube.com/watch?list=PL444C47ACE456066B&v=el8Pwa6ztAQ
Vídeo parte 2:
https://www.youtube.com/watch?v=VGslyKQInyk&index=2&list=PL444C47ACE456066B

ATIVIDADES

05. Resolva as equações diferenciais abaixo através de separação de variáveis. Verifique em cada caso se de fato a equação é separável, encontre a solução geral e, quando for o caso, a solução particular em função da condição inicial imposta.

a) $y'(x^2 + 9) = xy$, com $y(4) = 10$

b) $y' = y^{-3} \text{ sen } x$

06. Resolva as equações diferenciais abaixo através da técnica para equações homogêneas. Verifique em cada caso se de fato a equação é homogênea, encontre a solução geral.

a) $xy^3 \frac{dy}{dx} = 2y^4 + x^4$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

07. Resolva as equações diferenciais abaixo através da técnica para equações exatas. Verifique em cada caso se de fato a equação é exata e encontre a solução geral.

a) $y' = -\left(\frac{2x - 3y}{2y - 3x}\right)$

b) $\frac{ydy}{x^2 + y^2} = \frac{-xdx}{x^2 + y^2}$

08. Resolva as equações diferenciais abaixo através da técnica para equações lineares. Verifique em cada caso se de fato a equação é linear, encontre a solução geral e, quando for o caso, a solução particular em função da condição inicial imposta.

a) $y' = e^{3x} + 5y$

b) $dy = x^2 (3y + 1)\, dx$

REFLEXÃO

Todas as técnicas trabalhadas neste capítulo impõem uma condição importante sobre a equação diferencial, que sejam de primeira ordem, ou seja, a derivada de maior grau é a derivada primeira. Contudo, podemos refletir sobre o seguinte: se existem situações práticas, como apresentadas no capítulo 1, que exigem derivadas de segunda ordem ou de ordem superior, será que é possível determinar métodos especiais para a resolução desse tipo de equação diferencial?

CONCEITO

Alguns termos citados neste capítulo são de especial importância e aparecerão nos capítulos futuros, sendo assim reforçamos seus conceitos neste glossário.

1. **Equações diferenciais separáveis**: são equações diferenciais onde podemos separar de um lado da igualdade funções que dependam apenas de *x* e *dx* e do outro lado da igualdade funções que dependam apenas de *y* e *dy*;

2. **Equações diferenciais homogêneas**: são equações diferenciais onde a soma do grau das variáveis de cada funções sempre resultam no mesmo grau total;

3. **Equações diferenciais exatas**: são equações diferenciais que possuem em sua formulação função do tipo *f(x,y)* de maneira que a derivada parcial de f em relação a *y* é igual a derivada parcial em relação a *x*.

4. **Equações diferenciais lineares**: todos os coeficientes das derivadas são funções apenas da variável independente *x*, e ao mesmo tempo a variável dependente *y* e suas derivadas sejam de primeira ordem;

5. **Fator integrante**: é uma função que multiplicada por uma equação diferencial a torna solucionável com a aplicação direta de integrais.

LEITURA

Para se aprofundar nos conceitos e técnicas de resolução das equações diferenciais de primeira ordem, recomendamos que você leia as obras listadas nas referências bibliográficas do capítulo, em especial:

BOYCE, W.E e DiPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 9ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. [*Ler o capítulo 2*]

EDWARDS JR, C.H. e PENNEY, D.E. Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995. [*Ler o capítulo 1, páginas 15-82*]

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. Equações Diferenciais. Volume 1. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001. [*Ler os capítulos 2 e 3*]

BASSANEZI, R.C. Equações Diferenciais Ordinárias – Um Curso Introdutório. Coleção BC&T – Textos Didáticos – Volume 1 – Universidade Federal do ABC. Capítulo 3. Disponível em:

http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/iedo/notasdeaulas/equacoes-diferenciais-ordinrias-rodney.pdf [Acessado em 26/05/2015]

ROSA, M.S.R. Equações Diferenciais. Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009. Capítulo 4. Disponível em:

http://www.dma.im.ufrj.br/~rrosa/dvifiles/apostila-ed.pdf [Acessado em 26/05/2015]

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W.E e DiPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

EDWARDS JR, C.H. e PENNEY, D.E. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno**. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.

ZILL, D.G **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Thompson Pioneira, 2003.

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. Volume 1. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

3

Equações Diferenciais de Segunda Ordem e de Ordem Superior

Até agora, nos capítulos 1 e 2, vimos o que são as equações diferenciais, suas várias classificações e estudamos de forma mais detalhada as equações diferenciais de primeira ordem.

Neste capítulo faremos uma discussão sobre as equações diferenciais de segunda ordem, tratando com maiores detalhes suas soluções, assim como as equações de ordem acima de dois, ditas equações diferenciais de ordem superior. E como as aplicações são sempre o foco do cálculo diferencial e integral, apresentaremos também alguns exemplos clássicos como o caso do oscilador harmônico, com e sem amortecimento, na área de mecânica, e da aplicação em eletrônica para circuitos RLC (resistor – indutor – capacitor).

OBJETIVOS

- Encontrar as soluções das equações diferenciais lineares de segunda ordem.
- Reconhecer e desenvolver as soluções das equações diferenciais lineares de ordem superior.
- Verificar algumas das principais aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem.

3.1 Equações diferenciais de segunda ordem.

Como já dissemos antes, uma equação diferencial de segunda ordem é representada por uma equação que possui a segunda derivada de uma função como o termo que apresenta a derivada de maior ordem, ou seja, a derivada de segunda ordem de uma função ($y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$), como, por exemplo:

$$y'' - 3y' + 4y = 0$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} = 5\text{senx}$$

Você pode conferir com razoável facilidade que uma função (y_0) é solução de uma equação diferencial de segunda ordem substituindo y_0 na equação diferencial, como pode observar no exemplo abaixo [Adaptado de SIMMONS e KRANTS (2008)]:

EXEMPLO

Observe a equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + y = -\cos x$$

e sua solução sugerida $y_0 = -\frac{1}{2}x\text{senx}$. Verifique se a solução y0 é realmente solução da equação diferencial.

Resolução: Podemos derivar a função solução por duas vezes:

$$y' = -\frac{1}{2}\text{senx} - \frac{1}{2}x\cos x$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x\text{senx}$$

E substituir o resultado na equação diferencial, juntamente com a própria solução, ou seja, com

$$y'' + y = -\cos x$$

então

$$-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}xsenx - \frac{1}{2}xsenx = -\cos x$$

Afinal, $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x = -\cos x$ e $\frac{1}{2}xsenx - \frac{1}{2}xsenx = 0$.

Mas você deve estar se perguntando:

> E como podemos encontrar a solução de uma equação diferencial de segunda ordem?

Neste capítulo vamos abordar algumas das técnicas que determinam a solução dessas equações. Mas antes, vamos definir a forma geral de uma equação diferencial de ordem *n* como sendo:

$$h_0(x)y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + h_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + h(x)y = g(x)$$

Onde $h_0(x)y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = 0$ são funções de x contínuas no intervalo I e $h_0(x) \neq 0$. Se g(x) = 0 e n = 2, então essa equação é chamada de equação diferencial lineares de segunda ordem homogênea, bastante utilizada para resolver as equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas, como veremos mais à frente, e cujas soluções são obtidas com maior facilidade, ficando na forma:

$h_0(x)y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = 0$

Em seguida, abordaremos algumas definições importantes para se chegar às várias formas de resolução das equações diferenciais de segunda ordem, assim como as de ordem superior.

3.2 Teorema de Existência da unicidade.

Segundo ZILL e CULLEN, 2009, o Teorema que trata sobre a existência de uma solução única para uma equação diferencial sujeita às condições iniciais impostas pelo problema, diz que:

"As funções $h_0(x), h_1(x), h_2(x),...,h_n(x)$ e $g(x)$ sendo contínuas no intervalo I e sendo $h_0(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo, se x = x0 como qualquer ponto neste intervalo, então uma solução y(x) do problema de valor inicial existe no intervalo e é única", de forma que as condições iniciais y(x0) = y0, y'(x0) = y1, y"(x0) = y2, ..., y(n-1) = yn-1, assim como a equação diferencial de ordem n, dada por:

$$h_0(x)y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + h_2(x)y^{(n-2)} + ... + h(x)y = g(x)$$

devem ser satisfeitas pela função solução $y(x_0)$, com x_0 dentro do intervalo I.

EXEMPLO

Se a equação diferencial de segunda ordem dada por

$y'' - 9y = -18x$

tiver como solução a função $y = e^{3x} - 2e^{-3x} + 2x$, sujeita as condições de valor inicial y(0) = -1 e y'(0) = 11, podemos admitir que a solução y é única, pois satisfaz o teorema da existência da unicidade da solução, uma vez que as funções $h_0(x)$ e $h_1(x)$ são contínuas, assim como g(x) e ainda $h_0(x)$ é diferente de 0 em qualquer intervalo que contenha x = 0.

Resolução: Veja que não é difícil verificar que a função y(x) é realmente a solução da equação diferencial. Ou seja:

Dado $y = e^{3x} - 2e^{-3x} + 2x$, derivando esta função por duas vezes, teremos:

$y' = 3e^{3x} + 6e^{-3x} + 2$

e

$y'' = 9e^{3x} - 18e^{-3x}$

Substituindo o resultado da segunda derivada da função e a própria função solução na equação diferencial de segunda ordem $y'' - 9y = -18x$, teremos:

$9e^{3x} - 18e^{-3x} - 9(e^{3x} - 2e^{-3x} + 2x) =$

$= 9e^{3x} - 18e^{-3x} - 9e^{3x} + 18e^{-3x} - 18x = -18x$

Conforme esperávamos após as substituições necessárias para a comprovação do resultado, tanto a solução como a equação diferencial são satisfeitas com as condições iniciais.

Uma outra situação que pode ocorrer é quando for dado não apenas um ponto (x_0, y_0) por onde a função solução passa, mas dois pontos diferentes ou valores de suas derivadas, ou seja, além do ponto (x_0, y_0), mais um outro ponto (x_1, y_1) ou suas derivadas nesses pontos. Nesse caso teremos os chamados valores de contorno ou condições de contorno ou de fronteira.

E agora precisaremos determinar as soluções gerais das equações diferenciais lineares de segunda ordem ou, a partir dos valores iniciais ou das condições de contorno, determinar as soluções particulares dessas equações, apresentadas na próxima unidade.

Inicialmente, apresentaremos as soluções para os casos em que a equação diferencial linear de segunda ordem é homogênea, uma vez que as equações não-homogêneas podem ser resolvidas a partir das homogêneas associadas, ou seja:

Equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea:

$h_0(x)\, y'' + h_1(x)\, y' + h_2(x) y = g(x)$

Equação diferencial linear de segunda ordem homogênea associada:

$h_0(x)\, y'' + h_1(x) y' + h_2(x) y = 0$

Consideraremos também que as funções coeficientes $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ são contínuas, $g(x) = 0$ e que $h_0(x) \neq 0$.

3.3 Soluções gerais, equações de coeficientes constantes e não constantes e redução de ordem.

Para iniciar a discussão sobre as soluções gerais das equações diferenciais lineares homogêneas devemos analisar o teorema da superposição de soluções que diz:

"Considerando as k soluções da equação diferencial de segunda ordem $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ...$y_k(x)$, individualmente, a superposição, ou combinação linear dessas soluções, também será uma solução da equação linear". Ou seja,

$y = c_2 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \ldots + c_n y_n(x)$

com $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ as constantes arbitrárias.

Esta função é a solução geral da equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, quantas forem as soluções. Mas estamos interessados apenas nas soluções que são linearmente independentes, uma vez que a solução trivial $y = 0$ é sempre uma solução de uma equação diferencial linear homogênea.

E você se lembra o que são funções linearmente independentes?

É importante que você reflita sobre os conceitos de funções linearmente dependentes e independentes. As funções $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots y_n(x)$ são linearmente dependentes dentro de um intervalo estipulado I se existir constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, nem todas iguais a zero, de forma que, a combinação linear dessas funções seja igual a zero, ou seja, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$.

Se as funções não forem linearmente dependentes, elas serão linearmente independentes, ou seja, as funções $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots y_n(x)$ serão linearmente independentes se nenhuma delas for múltiplo de qualquer outra.

Existe uma forma bastante prática para determinar se as funções $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots y_n(x)$ são ou não linearmente independentes. Esta forma consiste na montagem e resolução de um determinante de ordem n contendo na primeira linha as n funções originais e nas demais linhas suas derivadas indo até a derivada de ordem n, sendo que, após a primeira linha do determinante contendo as funções originais, a cada linha do determinante são adicionadas as suas derivadas sucessivas de primeira ordem para a linha dois, segunda ordem para a linha três, e assim por diante. Este determinante é conhecido como WRONSKIANO (W), em homenagem ao matemático Hoenè Wronski (1778 – 1853) e é dado por:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \ldots y_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \ldots y'_n \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Se o cálculo do determinante Wronskiano for igual a zero (W = 0) para todos os valores de x dentro do intervalo I, então as funções $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots y_n(x)$ serão linearmente dependentes. Mas se $W \neq 0$ dentro desse intervalo, então as funções serão linearmente independentes, resultado que nos interessa para determinar a solução geral

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

Vamos verificar com um exemplo as considerações a respeito da solução geral construída a partir de várias funções solução linearmente independentes.

EXEMPLO

A equação diferencial linear de segunda ordem

$$y'' - 16y = 0$$

admite cada uma das seguintes soluções individualmente: $y_1 = e^{4x}$ e $y_2 = e^{-4x}$. Verifique se a combinação das soluções também é uma solução geral da equação diferencial, ou seja, se $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, então, $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$.

Resolução: Podemos testar individualmente as soluções $y_1 = e^{4x}$ e $y_2 = e^{-4x}$ na equação diferencial $y'' - 16y = 0$ e verificamos que ambas são, realmente soluções da equação. Mas será que a combinação linear das duas soluções também será uma solução da equação diferencial?

Para responder isso construímos o determinante Wronskiano, dado por:

$$W = \begin{vmatrix} e^{4x} & e^{-4x} \\ 4e^{4x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = (e^{4x})\left(-4e^{-4x}\right) - \left(4e^{4x}\right)(e^{-4x}$$

$$W = -4e^{4x-4x} - 4e^{4x-4x} = -4e^{0} - 4e^{0} = -4 - 4 = -8$$

Como $W = -8 \neq 0$, então as soluções são linearmente independentes e, portanto, as soluções $y_1 = e^{4x}$ e $y_2 = e^{-4x}$ podem ser escritas como uma combinação linear, gerando a solução geral da equação diferencial de segunda ordem, ou seja,

$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$

Sendo a_1 e a_2 constantes arbitrárias. Se substituirmos a solução geral determinada na equação diferencial, você poderá ver que ela também satisfaz a equação. Então, não se esqueça de fazer a verificação, tanto das funções individuais como da solução geral.

No caso em que temos a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$h_0 (x) y'' + h_1 (x) y' + h_2 (x) y = 0$

com coeficientes $h_0 (x) = 1$, $h_1 (x) = b$ e $h_2 (x) = c$, teremos uma equação diferencial mais simplificada, ou seja:

$y'' + by' + cy = 0$

Onde *b* e *c* são coeficientes constantes, ou seja, independentes de *x*.

Dos resultados anteriores, vemos que a solução para esta equação pode ser escrita na forma $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, onde C_1 e C_2 (sendo C maiúsculo) são constantes arbitrárias.

Para verificarmos uma solução padrão para a equação diferencial, utilizaremos a solução parcial $y = e^{mx}$ como uma tentativa para a solução.

Encontrando a primeira e a segunda derivada da solução parcial, temos:
$y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$

E se substituirmos estes resultados na equação diferencial $y'' + by' + cy = 0$, teremos:
$m^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$

Colocarmos em evidência o termo e^{mx}, teremos a forma:
$e^{mx} (m^2 + bm + c) = 0$

A solução dessa equação é determinada a partir da resolução da equação do segundo grau $m^2 + bm + c = 0$, uma vez que $e^{mx} \neq 0$, sempre. Esta equação quadrática é chamada de equação auxiliar da equação diferencial. E talvez você já tenha notado que a equação auxiliar pode ser encontrada simplesmente se fizermos a associação ou substituição de y^{II} por m^2, de y^{I} por m e y por 1, mantendo os coeficientes a = 1, b e c em suas posições na equação.
Assim, devemos resolver a equação
$m^2 + bm + c = 0$

para que m, o coeficiente da solução parcial $y=e^{mx}$ no expoente da solução, seja determinado. E como a equação auxiliar é uma equação do segundo grau, sabemos que pode ocorrer três possibilidades quanto à solução da equação. Podem ocorrer duas raízes reais iguais e duas raízes diferentes podendo ser reais ou complexas conjugadas. Vamos, então, analisar cada uma das possibilidades:

1°. caso – duas raízes reais distintas:
Neste caso, a solução geral será da forma

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

Onde C_1 e C_2 são as constantes arbitrárias, determinadas a partir das condições iniciais ou de contorno e m_1 e m_2 são as constantes determinadas a partir da solução da equação auxiliar.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial de segunda ordem

$y'' - 2y' - 24y = 0$

Encontre a solução da equação a partir da equação auxiliar.

Resolução: Sabemos que a associação da equação diferencial $y'' - 2y' - 24y = 0$ com a equação do segundo grau auxiliar $m^2 - 2m - 24 = 0$ é praticamente direta, podendo ser escrita dessa forma, onde $y'' = m^2$, $-2y' = -2m$ e $-24y = -24$.

Assim, a solução (m_1 e m_2) da equação do segundo grau $m^2 - 2m - 24 = 0$ pode ser encontrada de forma bastante simples através da técnica da soma e produto das raízes da equação, obtendo: $m_1 = -4$ e $m_2 = 6$, uma vez que $\Delta > 0$.

Como a solução geral para a equação diferencial de segunda ordem reduzida à equação auxiliar pode ser dada por:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{6x}$$

Então, podemos substituir as soluções $m_1 = -4$ e $m_2 = 6$ nos expoentes da forma geral, obtendo:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{6x}$$

Partindo dos valores iniciais $y(0) = 3$ e $y'(0) = 8$, como exemplo, podemos encontrar a solução particular para a equação diferencial, ou seja, C_1 e C_2, ou seja, se

$$y' = -4C_1e^{-4x} + 6C_2e^{6x}$$

E sua derivada como sendo

$$y' = -4C_1e^{-4x} + 6C_2e^{6x}$$

Substituindo em y e em y' os valores iniciais, teremos:

$$3 = C_1e^{(-4(}0)) + C_2e^{(6(}0)) \text{ ou } 3 = C_1 + C_{(2)}$$

e

$$8 = -4C_1e^{(-4(}0)) + ?6C_2e^{(6(}0)) \text{ ou } 8 = -4C_1 + 6C_{(2)}$$

Resolvendo o sistema linear por uma forma bastante simples, por substituição ou soma,

teremos $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -4C_1 + 6C_2 = 8 \end{cases}$

A solução encontrada para o sistema será $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$, como você pode facilmente verificar.

Obtemos, assim, a solução particular para a equação diferencial $y'' - 2y' - 24y = 0$ da forma

$y = e^{-4x} + 2e^{6x}$

Caso você queira testar a solução na equação diferencial, seria um excelente exercício, assim como as solução individuais $y_1 = e^{-4x}$ e $y_2 = 2e^{6x}$.

2º. caso – duas raízes reais iguais:

Assim como no caso anterior, quando temos duas raízes iguais, teremos uma forma padrão para a solução geral, sendo dada por:

$y = C_1 e^{mx} + C_2\, x e^{mx}$

Onde m é o valor da raiz dupla da equação auxiliar e C_1 e C_2 são as constantes arbitrárias.

Então, você deve estar se perguntando:

Como saber que a solução geral possui essa forma e não outra qualquer?

Isso será explicado quando falarmos sobre a técnica de redução de ordem logo à frente.

No exemplo 5 a seguir vamos verificar a aplicação para este caso.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial de segunda ordem

$y'' - 8y' + 16y = 0$

Encontre a solução da equação a partir da equação auxiliar, determinando ainda a solução particular no caso em que y(0) = 3 e y' (0) = 17.

Resolução: A equação auxiliar associada à equação linear de segunda ordem é dada por:

$m^2 - 8m + 16 = 0$

Cujas soluções são duas raízes iguais a 4. Portanto, m = 4.

E como a solução geral para a equação diferencial com duas raízes iguais é dada por:

$y = C_1 e^{mx} + C_2 xe^{mx}$

Então, a solução será escrita como:

$y = C_1 e^{5x} + C_2 xe^{5x}$

Se substituirmos os valores y = 3, quando x = 0 na solução geral e y' = 17, quando x = 0 na primeira derivada dessa solução, então encontraremos duas equações. Resolvendo o sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ 5C_1 + C_2 = 17 \end{cases}$$

Encontramos, então $C_1 = 3$ e $C_2 = 2$, sendo a solução particular da equação diferencial $y'' - 8y' + 16y = 0$, da forma:

$y = 3e^{4x} + 2xe^{4x}$

Esta solução também pode ser testada integralmente na equação diferencial ou ainda suas solução parciais, no caso $y_1 = 3e^{4x}$ ou ainda $y_2 = 2xe^{4x}$, individualmente.

Podemos ainda ter o caso em que o coeficiente $h_0 (x)$ da equação diferencial seja diferente de 1. Nesse caso, podemos dividir a equação toda por $h_0 (x)$, recaindo em um dos casos anteriores, com raízes iguais ou distintas ou, ainda, complexas.

Vamos desenvolver um exemplo que teremos raízes não exatas e distintas com coeficiente $h_0 (x) \neq 1$ para ver que o procedimento utilizado será o mesmo.

EXEMPLO

A equação diferencial dada por

$4y'' + 9y' + 5y = 0$

terá uma solução particular se y = 5 quando x = 0 e y' = 13 quando x = 0. Encontre a solução particular dessa equação diferencial.

Resolução: A equação auxiliar associada à equação diferencial é dada por

$4m^2 + 9m + 5 = 0$

Cuja solução é encontrada facilmente resolvendo a equação do segundo grau, obtendo

$\Delta = 1$ e as raízes $m_1 = -1$ e $m_2 = -\frac{5}{4}$.

Dessa forma, a solução geral da equação diferencial será dada por:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{5}{4}x}$$

A solução particular poderá ser encontrada substituindo na solução geral as condições iniciais y = 5 e x = 0. Ou seja,

$$5 = C_1 e^{-0} + C_2 e^{-\frac{5}{4}(0)}$$

E na sua primeira derivada da solução geral y' = 13 quando x = 0. Portanto,

$$y' = -C_1 e^{-x} - \frac{5}{4} C_2 e^{-\frac{5}{4}x}$$

E com a substituição

$$13 = -C_1 e^{-0} - \frac{5}{4} C_2 e^{-\frac{5}{4}(0)}$$

Obtendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -C_1 - \frac{5}{4} C_2 = 13 \end{cases}$$

cuja solução será $C_1 = 77$ e $C_2 = -72$. Assim a solução particular da equação particular será

$$y = 77e^{-x} - 72e^{-\frac{5}{4}x}$$

3º. caso – duas raízes complexas conjugadas:

No caso em que a solução da equação auxiliar fornece raízes complexas, de forma que $\Delta < 0$, teremos duas raízes distintas dadas por z_1 e z_2, ou seja:

$z_1 = s + ti$

$z_2 = s - ti$

Onde s e t são números reais que compõem os números complexos e $i = \sqrt{-1}$ ou ainda $i^2 = -1$. A solução geral será da forma

$y = e^{sx} (C_1 \cos (tx) + C_2 \text{ sen } (tx))$

Para entender melhor a formação dessa solução geral devemos nos lembrar um pouco sobre séries infinitas, números complexos e a representação de e^{iz} em termos de seno e cosseno.

A série infinita que define as funções e^x, $\cos^x$ e sen^x são da forma:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\text{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

E se tivermos x = iz, então a série $e^x = e^{ix}$ será escrita na forma:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} \ldots$$

Obtemos:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} \ldots$$

Se agruparmos os termos contendo i e os termos que não o contém, encontramos:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)$$

De forma que o primeiro termo da expressão reproduz a série da função sen z e o segundo termo a função cos z, podendo dessa forma escrever a função e^{ix} em termos do seno e do cosseno de z, ou seja:

$e^{ix} = \cos z + i\text{sen } z$

Esta expressão é conhecida como Fórmula de Euler, em homenagem ao matemático Leonhard Euler (1707 – 1783).

Se tomarmos a equação diferencial associada à equação auxiliar
$m^2 + bm + c = 0$

cuja solução são os números complexos z_1 e z_2, então a solução geral na forma:

$$y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$$

Teremos
$y = C_1\ e^{(s+ti)x} + C_2\ e^{(s-ti)x}$

Cujo desenvolvimento algébrico resulta na expressão:
$y = e^{sx}\ (C_1\ e^{itx} + C_2\ e^{-itx})$

Se a Fórmula de Euler pode ser escrita como
$e^{itx} = \cos tx + i \operatorname{sen} tx$

Então,
$e^{-itx} = \cos tx - i \operatorname{sen} tx$

Que associadas e substituídas na solução geral temos:
$y = e^{sx}\ (C_1\ \cos(tx) + C_2 \operatorname{sen}(tx))$

Conforme descrito anteriormente.

E agora podemos resolver uma equação diferencial que se enquadra nos termos descritos anteriormente.

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial
$y'' - y' + 4{,}25y = 0$

Sujeita às condições iniciais de $y = 2$ quando $x = 0$ e $y' = \frac{7}{3}$ quando $x = 0$.

Resolução: Fazendo a associação da equação diferencial com a equação auxiliar teremos: $m^2 - m + 4{,}25 = 0$

Onde determinamos $\Delta = -16$, ou seja, serão duas raízes complexas e distintas, dadas por:

$$m_1 = \frac{1}{2} + 2i$$

$$m_2 = \frac{1}{2} - 2i$$

Em associação com a solução complexa, temos $S = \frac{1}{2}$ e t = 2, resultando na solução geral da equação diferencial:

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)\right)$$

Submetendo a solução geral às condições iniciais teremos:

$$2 = e^{\frac{1}{2}(0)}\left(C_1\cos(2(0)) + C_2\text{sen}(2(0))\right)$$

Ou seja, $2 = e^0 (C_1 \cos(0) + C_2 \text{sen}(0))$

Ou ainda $2 = 1 (C_1 (1) + C_2 (0))$

Então, $C_1 = 2$

E substituindo $y' = \frac{7}{3}$ quando x = 0 na derivada da solução geral, dada por:

$$y' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)\right) + e^{\frac{1}{2}x}\left(2C_2\cos(2x) - 2C_1\text{sen}(2x)\right)$$

Teremos:

$$\frac{7}{3} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(0)}\left(C_1\cos(2(0)) + C_2\text{sen}(2(0))\right) + e^{\frac{1}{2}(0)}\left(2C_2\cos(2(0)) - 2C_1\text{sen}(2(0))\right)$$

Ou seja,

$$\frac{7}{3} = \frac{1}{2}e^0\left(C_1\cos 0 + C_2\text{sen}0\right) + e^0\left(2C_2\cos 0 - 2C_1\text{sen}0\right)$$

Resultando em:

$$\frac{7}{3} = \frac{1}{2}(1)\left(C_1(1) + C_2(0)\right) + (1)\left(2C_2(1) - 2C_1(0)\right)$$

Sendo

$$\frac{7}{3}=\frac{1}{2}C_1+2C_2$$

Substituindo $C_1 = 2$ na expressão acima teremos

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{2}(2)=2C_2$$

$$\frac{-4}{3}=2C_2$$

$$C_2=\frac{-2}{3}$$

E a solução particular da equação diferencial será:

$$y=e^{\frac{1}{2}x}\left(2\cos(2x)-\frac{2}{3}\text{sen}(2x)\right)$$

Cuja solução, assim como as dos outros exemplos podem ser testadas junto às equações diferenciais.

Para este exemplo, construímos o gráfico da solução particular exemplificando o caso de uma função que simula o efeito de ressonância pura, uma vez que a amplitude dos picos aumenta com o aumento de x, com y tendendo a infinito quando x tende a infinito e y tendendo a zero quando x tende menos infinito.
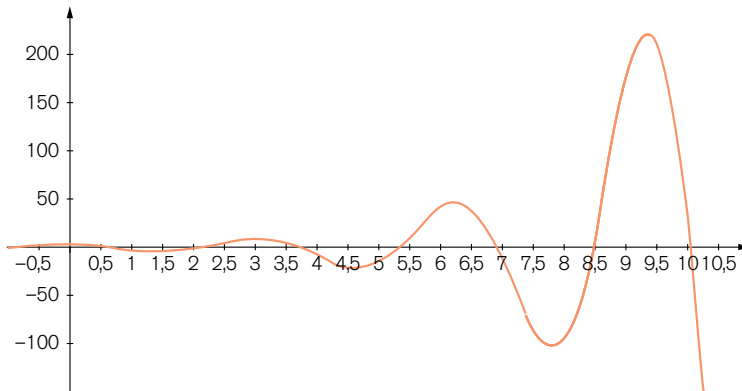
Figura 3.1 – Comportamento da função solução particular da equação diferencial $y''-y'+4{,}25y=0$ simulando um oscilador harmônico forçado.

EXEMPLO

Resolver a equação diferencial

$2y'' + y' + 8{,}125y = 0$

Encontrando a solução particular sabendo que y = 1 e $y' = \frac{7}{4}$ quando x = 0 e construindo o gráfico.

Resolução: Fazendo a associação da equação diferencial com a equação auxiliar teremos: $2m^2 + m + 8{,}125 = 0$

Onde determinamos $\Delta = -64$, ou seja, serão duas raízes complexas e distintas, dadas por:

$$m_1 = \frac{-1}{4} + 2i$$

$$m_2 = \frac{-1}{4} - 2i$$

Em associação com a solução complexa, temos $s = \frac{-1}{4}$ e t = 2, resultando na solução geral da equação diferencial:

$$y = e^{\frac{-1}{4}x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)\right)$$

Submetendo a solução geral às condições iniciais teremos:

$$1 = e^{\frac{-1}{4}(0)}\left(C_1\cos(2(0)) + C_2\text{sen}(2(0))\right)$$

Ou seja, $1 = e^0 (C_1 \cos(0) + C_2 \text{sen}(0))$

Ou ainda $1 = 1(C_1 (1) + C_2 (0))$

Então, $C_1 = 1$

E substituindo $y' = \frac{7}{4}$ quando x = 0 na derivada da solução geral, dada por:

$$y' = \frac{-1}{4}e^{\frac{-1}{4}x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)\right) + e^{\frac{-1}{4}x}\left(2C_2\cos(2x) - 2C_1\text{sen}(2x)\right)$$

Teremos:

$$\frac{7}{4} = \frac{-1}{4}e^{\frac{-1}{4}(0)}\left(C_1\cos(2(0))\right) + e^{\frac{-1}{4}(0)}\left(2C_2\cos(2(0))\right)$$

Ou seja,

$$\frac{7}{4}=\frac{-1}{4}e^{0}\left(C_1\cos 0\right)+e^{0}\left(2C_2\cos 0\right)$$

Sendo

$$\frac{7}{4}=\frac{-1}{4}C_1+2C_2$$

Substituindo C_1 = 1 na expressão acima teremos

$$\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(1)=2C_2$$

$$\frac{8}{4}=2C_2$$

C_2 = 1

E a solução particular da equação diferencial será:

$$y=e^{-\frac{1}{4}x}\left(\cos(2x)+\text{sen}(2x)\right)$$

O gráfico que representa a solução da função tem o comportamento similar a um oscilador harmônico amortecido, onde verificamos que a função tende a zero quando x tende a infinito.
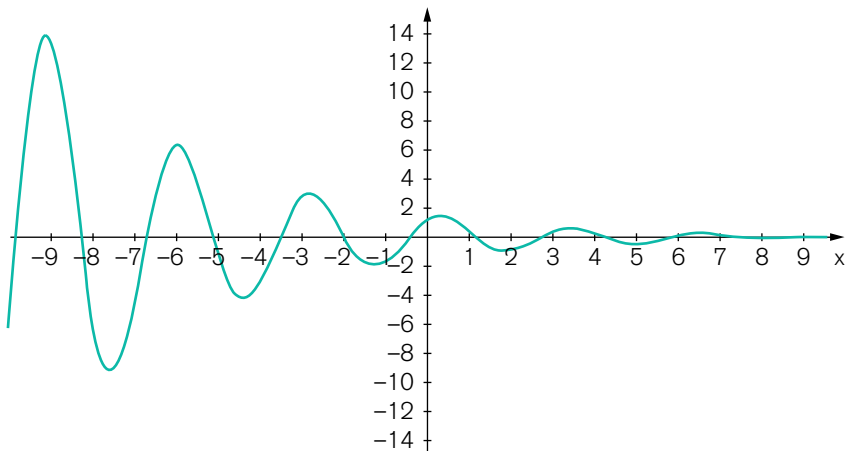
Figura 3.2 – Comportamento da função solução particular da equação diferencial 2y"+y'+8,125y = 0 simulando um oscilador harmônico amortecido.

Outra forma de resolver uma equação diferencial da forma
$y'' + u(x)\,y' + v(x)\,y = 0$

é construir uma segunda solução a partir de uma solução não trivial reduzindo a equação diferencial de segunda ordem em uma equação diferencial de primeira ordem. Esta técnica é conhecida como Método de Redução de Ordem e pode ser usado para encontrar a forma geral da solução de uma equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes ou não.

Utilizaremos também este método para o caso em que as soluções de uma equação auxiliar tem raízes iguais e reais, de forma que a demonstração da forma geral será uma das ilustrações do método.

O Método de Redução de Ordem parte de uma primeira solução y_1 conhecida e, a partir dessa, encontramos uma segunda solução y_2, de forma que ambas devem ser linearmente independente, ou seja, a razão entre as soluções não pode ser constante dentro de um intervalo definido. Então,

$$\frac{y_2}{y_1} = g(x)$$

Ou ainda, como $y_2 = g(x)\,y_1$, sendo y_1 e y_2 funções de x.

Calculando a primeira e segunda derivadas de y_2, e após algumas manipulações algébricas chegamos à forma geral da solução complementar y_2 como:

$$y_2(x) = y_1(x).\int \frac{e^{-\int u(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$$

De forma que a solução geral pode ser escrita a partir das duas soluções y_1 e y_2 na forma: $y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$.

Para o caso da demonstração da solução geral no caso em que as raízes da equação auxiliar são iguais e reais, escrevemos a equação diferencial padrão na forma:

$y'' + by' + cy = 0$

E tomamos como primeira solução a função $y_1 = e^{mx}$, uma vez que $m_1 = m_2 = m$. Segundo a solução da equação auxiliar

$m^2 + bm + c = 0$

Uma vez que $\Delta = 0$, tem como solução

$$m = \frac{-b}{2a}$$

Como a = 1, podemos escrever b = -2m.

Podemos assim, associar os termos da equação com a expressão para o cálculo da segunda solução como sendo u(x) = b = -2m. Daí, a solução poderá ser escrita como:

$$y_2(x) = y_1(x).\int \frac{e^{-\int u(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx$$

$$y_2(x) = e^{mx}.\int \frac{e^{-\int -2mdx}}{(e^{mx})^2} dx$$

Resolvendo a integral presente no expoente do numerador temos

$$e^{-\int -2mdx} = e^{2mx} \text{ e } (e^{mx})^2 = e^{2mx}.$$

Portanto,

$$y_2(x) = e^{mx} \cdot \int \frac{e^{2mx}}{e^{2mx}} dx = e^{mx} \cdot \int 1dx = x \cdot e^{mx}$$

E a solução geral para este caso, conforme havíamos apresentado é da forma:

$y = C_1 e^{mx} + C_2 xe^{mx}$

É importante verificarmos a solução para o caso em que os coeficientes são constantes, sabendo previamente uma das soluções que satisfaz a equação diferencial, como no exemplo 8 abaixo:

EXEMPLO

[retirado de Zill e Cullen] Encontre a solução geral da equação diferencial homogênea:

$y'' + 2y' + y = 0$

Tendo como uma das soluções a função $y_1 = xe^{-x}$.

Resolução: Fazendo a associação com a forma geral da equação diferencial

$y'' + u(x)\, y' + v(x)\, y = 0$

Tendo como u(x) = 2, teremos fazendo as substituições na expressão geral para a segunda solução, devendo ambas serem linearmente independente, então;

$$y_2(x) = xe^{-x} \cdot \int \frac{e^{-\int 2dx}}{(xe^{-x})^2} dx$$

E com as substituições, teremos:

$$y_2(x) = xe^{-x} \cdot \int \frac{e^{-\int 2dx}}{(xe^{-x})^2} dx$$

Como a integral presente no expoente do numerador será:

$$\int 2dx = 2x$$

Então,

$$y_2(x) = xe^{-x}.\int \frac{e^{-2x}}{x^2 e^{-2x}} dx$$

Simplificando o integrando, teremos:

$$y_2(x) = xe^{-x} \cdot \int \frac{1}{x^2} dx$$

Cujo valor da integral é dado por: $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}$, então:

$$y_2(x) = xe^{-x} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)$$

Ou seja,

$y_2(x) = -e^{-x}$

Será a outra solução para a equação diferencial. A combinação das duas solução nos resulta em:

$y = C_1 xe^{-x} - C_2 e^{-x}$

Sendo essa a solução geral da equação diferencial y'' + 2y' + y = 0.

Seria um excelente exercício verificar se as soluções individuais, assim como a composta com as soluções y_1 e y_2, são realmente soluções da equação diferencial.

Mas também é importante verificarmos a solução para o caso em que os coeficientes não são constantes. O método também é válido, desde que se saiba uma das soluções da equação diferencial e, a partir dela, encontramos uma segunda solução, formando uma solução que comporta as duas individuais, sendo essas linearmente independentes. Então, vamos desenvolver um exemplo em que os coeficientes não são constantes, utilizando assim o Método de Redução de Ordem para encontrar a solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem homogênea.

EXEMPLO

Ache a solução geral da equação diferencial, sabendo que uma das soluções da equação é é $y_1 = x^4$:

$$x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$$

Para podermos aplicar o Método de Redução de Ordem devemos ter um formato padrão da equação diferencial, assim como saber uma das soluções que satisfaça a equação. Para transformar na forma utilizada no método é necessário que a equação diferencial seja dividida por x^2, obtendo:

$$y'' - \frac{7x}{x^2} y' + \frac{16}{x^2} y =$$

Ou seja,

$$y'' - \frac{7}{x} y' + \frac{16}{x^2} y =$$

Portanto, $u(x) = \frac{-7}{x}$ e $y_1 = x^4$. Substituindo os dois resultados na forma geral:

$$y_2(x) = y_1(x).\int \frac{e^{-\int u(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx$$

Teremos:

$$y_2(x) = x^4 \cdot \int \frac{e^{-\int -\frac{7}{x}dx}}{(x^4)^2} dx = x^4 v \int \frac{e^{7\int \frac{1}{x}dx}}{x^8} dx = x^4 \cdot \int \frac{e^{7\ln x}}{x^8} dx = x^4 \cdot \int \frac{e^{\ln x^7}}{x^8} dx$$

Se lembrarmos da propriedade de logaritmos que diz $a^{\log_a^{x^7}} = x^7$, então:

$$y_2(x) = x^4 \cdot \int \frac{x^7}{x^8} dx = x^4 \cdot \int \frac{1}{x} dx = x^4 \cdot \ln x$$

Portanto, a segunda solução será: $y_2(x) = x^4 \cdot \ln x$.

A solução geral que é uma combinação linear das soluções y_1 e y_2 será:

$y = C_1 x^4 + C_2 x^4 \cdot \ln x$

Até agora resolvemos equações diferenciais de segunda ordem homogêneas. Na próxima seção discutiremos a solução para as equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas.

A seguir vamos ver algumas aplicações para equações diferenciais homogêneas e não homogêneas, como o caso do oscilador harmônico simples não amortecido ou de um circuito elétrico RLC.

Todo sistema físico em equilíbrio, quando submetido a forças externas que tendem a desequilibrá-lo, tende a voltar ao estado original graças a forças restauradoras existentes no sistema por natureza.

Este é o caso de um sistema massa-mola em que a massa m é retirada de seu estado de repouso e equilíbrio a partir de uma força externa. No estado de equilíbrio ou repouso, a mola não exerce qualquer força sobre a massa, mas se a massa for submetida a uma força externa que a retira de seu estado de equilíbrio, então a mola aplicará uma força sobre a massa a fim de tentar restaurar a situação original. A equação de movimento para esse sistema físico é representado por uma equação diferencial de segunda ordem, dada por:

$m \cdot x'' = -kx$

Podendo ainda ser escrita na forma:

$m \cdot x'' + kx = 0$

Onde m é a massa do corpo que foi retirada de seu estado de equilíbrio, x(t) é o deslocamento da massa a partir do repouso e k é a constante elástica da mola ou constante de Hooke, sendo $k>0$

Se dividirmos a equação diferencial por m e substituirmos $a^2 = \frac{k}{m}$, então teremos uma equação diferencial bastante conhecida da forma:

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0$$

Ou ainda

$x'' + a^2 x = 0$

Cuja solução é dada por:

$x(t) = C_1 \, sen(at) + C_2 \cos(at)$

Se submetermos o sistema às condições iniciais de $x(0) = x_0$, que representa a massa ser deslocada para a direita e solta a partir do repouso, ou seja, sua velocidade inicial é zero, ou seja, $v(0) = 0$. Como a velocidade é a primeira derivada da função posição em relação ao tempo $x'(t) = v(t)$ então, podemos encontrar a solução particular da equação diferencial que representa o deslocamento da massa no tempo, que permanece nesse estado de movimento desde que não haja forças externar para cessar o movimento, como a força de atrito, uma situação ideal.

Então, substituindo na solução geral as condições iniciais, temos:

$x(t) = C_1 \, sen(at) + C_2 \cos(at)$

Que substituída, nos dá:

$x_0 = C_1 \, sen(a(0)) + C_2 \cos(a(0))$

Ou ainda,

$x_0 = C_1 (0) + C_2 (1)$

Portanto, $C_2 = x_0$

Para a primeira derivada da solução, representada pela velocidade, teremos:

$x'(0) = 0 = aC_1 \cos(a(0)) - aC_2 \, sen(a(0))$

Dando,

$0 = aC_1 \cos(a(0))$

Ou

$0 = aC_1 (1)$

Portanto, $C_1 = 0$.

Então, a solução particular será da forma:

$x(t) = x_0 \cos(at)$

Caso existam forças externar, o sistema é chamado de amortecido, o que torna a situação mais próxima do que realmente ocorre.

No caso de termos forças externas presentes no sistema, então podemos modificar a equação diferencial fazendo a soma de todas as forças atuantes, como por exemplo:

$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos t$

Também tomada como exemplo de uma equação diferencial de segunda ordem, agora não homogênea.

Uma outra situação também bastante conhecida é o caso de um circuito elétrico composto por um capacitor (C), um indutor (L) e um Resistor, também chamado de circuito RLC em que atua uma força eletromotriz $E = E_0 \cos t$, cuja carga Q no capacitor é calculada pela equação diferencial:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E_0 \cos \omega t$$

Onde L é a indutância o indutor, R é a resistência do resistor e C é a capacitância do capacitor. Essa equação pode ser associada facilmente à equação do oscilador harmônico forçado dada anteriormente, pois são sistemas similares devido à atuação das forças externas.

CONEXÃO

As aplicações para equações diferenciais de segunda ordem são bastante utilizadas em sistemas físicos, computacionais e de engenharia.

É importante que você leia um pouco mais sobre as várias aplicações. Abaixo alguns links em que você encontra algumas das aplicações mais clássicas.

http://www.ime.uerj.br/~calculo/LivroIV/edoseg.pdf

http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/movimento/ocilador_harm_amortecido/

3.4 Equações diferenciais lineares de segunda ordem não homogêneas. Soluções particulares.

A equação diferencial de segunda ordem não homogênea tem a forma:

$$h_0(x)y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = g(x)$$

Onde $g(x) \neq 0$. A solução geral é dada pelo conjunto das soluções que satisfazem a equação diferencial homogênea, chamada de solução geral da equação complementar y_c, dada por:

$$h_0(x)y'' + h_1(x)y' + h_2(x)y = 0$$

Além da combinação linear com a solução particular y_p. Ou seja,

$$y = y_c + y_p$$

Como sabemos resolver as equações diferenciais de segunda ordem homogênea, de acordo com nosso estudo feito até agora, então fica fácil determinar a solução para uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea, principalmente se for conhecida a solução particular dessa equação. Vamos entender melhor o método resolvendo mais um exemplo.

EXEMPLO

Seja a equação diferencial e sua solução particular, dadas por:

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x} \text{ com } y_p = 3e^{2x}.$$

Primeiramente, precisamos resolver a equação diferencial homogênea dada por:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

Encontrando a equação auxiliar associada a ela teremos a seguinte equação do segundo grau:

$$m^2 - 6m + 5 = 0$$

Cuja solução desenvolvida através de soma e produto das raízes, será $m_1 = 1$ e $m_2 = 5$. E como as raízes são reais e distintas, sabemos que a solução geral será dada por:

$$y_c = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

Substituindo as raízes m_1 e m_2, teremos:

$y_c = C_1 e^{1x} + C_2 e^{5x}$

Então, a solução geral será da forma:

$y = C_1 e^{1x} + C_2 e^{5x} + 3e^{2x}$

Existe ainda a possibilidade de termos uma sequência semelhante de equações diferenciais de segunda ordem, cujo termo g(x) se diferenciam entre elas, assim como suas soluções particulares y_p. Neste caso, a solução da equação diferencial composta por todas as funções g(x) é uma sobreposição de todas as soluções também, além da solução complementar.

CONEXÃO

E no link abaixo você poderá observar uma séries de imagens reproduzindo os osciladores harmônicos, como nos pêndulos de pintura:

https://www.youtube.com/watch?v=3rigdgiHmnQ

ou uma aula sobre osciladores harmônicos

https://www.youtube.com/watch?v=y4sB6oGZeLs

3.5 Equações diferenciais de ordem superior.

Em outras situações que a equação diferencial é de ordem superior a dois podemos escrever a forma geral da equação diferencial como:

$$h_0(x)y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + h_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + h(x)y = g(x)$$

Que escrita na forma homogênea ou na forma da equação complementar:

$$h_0(x)y^{(n)} + h_1(x)\, y^{(n-1)} + h_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + h(x)\, y = 0$$

Podendo a ela associar uma equação polinomial auxiliar de grau n, dada por:

$$a_n m^{(n)} + a_{n-1} m^{(n-1)} + a_{n-2} m^{(n-2)} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0$$

De forma que os coeficientes a_n são constantes dentro dos números reais.

A forma da solução geral da equação diferencial homogênea de ordem n dependerá do número de soluções de mesmo valor da equação auxiliar tiver. Ou seja:

- se todas as raízes da equação auxiliar forem diferentes entre si, o formato da solução geral será:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

EXEMPLO

[retirado de Zill e Cullen] Dada a equação diferencial de terceira ordem homogênea, encontre sua solução geral

$y''' - 4y'' - 5y' = 0$

Resolução: Encontrando a equação auxiliar associada à equação diferencial de ordem 3, temos:

$m^3 - 4m^2 - 5m = 0$

Resolvendo a equação colocando inicialmente m em evidência e resolvendo a equação do segundo grau, teremos:

$m(m^2 - 4m - 5) = 0$

Cujas soluções serão: $m_1 = 0$, $m_2 = -1$ e $m_3 = 5$, as duas calculadas por soma e produto das raízes da equação do segundo grau. Dessa forma, a solução geral será:

$y = C_1\, e^{0x} + C_2\, e^{(-1x)} + C_3\, e^{5x}$

ou ainda

$y = C_1 + C_2\, e^{(-x)} + C_3\, e^{5x}$

Para o caso em que duas das raízes da equação auxiliar são iguais ou complexas, então a combinação de possibilidades é bastante grande, dependendo da ordem da equação diferencial. Dessa forma a equação diferencial terá a forma:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x} + C_3x^2e^{m_3x} + \ldots + C_nx^{n-1}e^{m_nx}$$

Uma vez que as soluções individuais devem ser linearmente independentes, podendo se repetir o termo apara raízes diferentes.

EXEMPLO

[retirado de Zill e Cullen] Resolva a equação diferencial:

$y'''' + 2y'' + y = 0$

Encontrando a solução geral da equação:

A equação auxiliar associada será:

$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$

Podemos escrever a equação na forma de um produto notável para que a solução seja mais facilmente encontrada, ou seja:

$m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$

As raízes da equação auxiliar serão: $m_1 = m_2 = i$ e $m_3 = m_4 = -i$. Portanto, a forma geral da solução será:

$y = C_1\, e^{ix} + C_2\, xe^{ix} + C_3\, e^{(-ix)} + C_4\, xe^{(-ix)}$

E se aplicarmos a Fórmula de Euler, podemos reescrever a solução em termos de senos e cossenos, ou seja:

$y = C_1 \cos x + C_2\, x \cdot \cos x + C_3\, \text{sen} x + C_4\, x \cdot \text{sen} x$

ATIVIDADES

09. Resolva a equação diferencial particular abaixo:

$y'' - 4y' + 13y = 0$, com $y = 6$ quando $x = 0$ e $y' = 10$ quando $x = 0$.

10. Encontre a solução geral da seguinte equação diferencial:

$y'' - 2y' + 2y = 0$

11. Dada a equação diferencia $xy'' + y' = 0$ e sabendo que $y_1 = \ln x$ é uma solução, encontre uma segunda solução da equação diferencial escrevendo uma solução geral.

12. Seja a equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$$

Encontre a solução da equação a partir da equação auxiliar, determinando ainda a solução particular no caso em que $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.

REFLEXÃO

Todos os métodos desenvolvidos até agora são métodos para apenas alguns tipos de equações diferenciais. E será que existe alguma outra forma de resolver essas equações diferenciais? Ou será que os métodos aqui estudados seriam capazes de resolver todos os tipos de equações diferenciais? Nos próximos capítulos estaremos discutindo um pouco mais sobre isso, mostrando as técnicas de Transformada de Laplace e Fourier.

CONCEITO

6. **Equação diferencial de segunda ordem**: é uma equação que apresenta uma segunda derivida de uma função como a derivada de maior ordem na equação.
7. **Equação auxiliar**: é uma equação algébrica associada a uma equação diferencial de segunda ordem ou de ordem superior em que uma variável equivale à derivada na equação, como $m^2 = y''$.
8. **Oscilador harmônico**: é um sistema físico cujo corpo em movimento alcança a mesma posição repetidas vezes, de forma harmônica, podendo ser Simples, Amortecido ou Forçado.
9. **Circuito RLC**: é um sistema composto por três componentes eletrônicos, um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C). Esses componentes, quando ligados entre si formam um circuito elétrico conhecido como RLC.
10. **Wronskiano**: é uma função desenvolvida a partir do cálculo de um determinante composto por funções originais e suas derivadas para definir se um conjunto de funções são linearmente dependentes ou independentes.

LEITURA

É importante que você leia um pouco mais sobre os Osciladores harmônicos. O link em destaque abaixo mostra algumas definições para que você possa estar mais informado sobre o assunto. Além dessa aplicação outras aplicações e outros métodos de resolução de equações diferenciais de segunda ordem que não foram abordados aqui podem ser encontrados nos textos indicados abaixo. Além também de existirem muitas aplicações das equações diferenciais, principalmente na área de Física e Engenharia. Os modelos que envolvendo equações diferenciais foram capazes de desenvolver diversos avanços nessas áreas, assim como explicar diversos efeitos como o famoso caso da Ponte Tacoma Narrows, falando um pouco mais sobre o efeito de Ressonância. Abaixo apresentamos também alguns links e textos para que você possa se interar um pouco mais sobre essas aplicações, principalmente na área de tecnologia.

(ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. Matemática Avançada para Engenharia. Equações diferenciais elementares e transformada de Laplace. Volume Único. 3ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. Capítulo 3, unidade 3.4 (Coeficientes indeterminados), pag 139 a 146.)

(ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. Equações Diferenciais. Volume 1. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001. Capítulo 5, unidade 5.3 (Movimento forçado), pag. 248 a 256.)

http://www.seara.ufc.br/tintim/fisica/ressonancia/ressonancia6.htm

http://www.sbmac.org.br/cmac-se2011/trabalhos/PDF/332.pdf

http://www.peb.ufrj.br/cursos/eel420/EEL420_Modulo7.pdf

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SIMMONS, G.F e KRANTS, S.G. **Equações Diferenciais**: teoria, técnica e prática. 1ª Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

EDWARDS JR, C.H. e PENNEY, D.E. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno**. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.

FIGUEIREDO, D.G. e NEVES, A.F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1997.

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. Volume 1. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. **Matemática Avançada para Engenharia**. Equações diferenciais elementares e transformada de Laplace. Volume Único. 3ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

4

A Transformada de Laplace

Neste quarto capítulo vamos discutir os conceitos e propriedades da transformada de Laplace. Como todo procedimento de transformação, a transformada de Laplace tem especial importância na simplificação de algumas equações diferenciais. Para a aplicação do processo de transformação, faremos uso de vários conceitos, como, por exemplo, o de integral imprópria e de função que sejam de ordem exponencial.

OBJETIVOS

- Entender os conceitos de integrais impróprias.
- Desenvolver a transformada de Laplace.
- Entender as propriedades e as condições de existência da transformada de Laplace.
- Conhecer a transformada das derivadas e a inversa da transformada.
- Entender a aplicação das transformadas e o uso da tabela das transformadas.

4.1 Conceitos e noções básicas.

O que é uma transformada?

Para que serve uma transformada?

Bem, para dar início a nossa discussão da Transformada de Laplace, é importante que antes tenhamos respostas para as duas perguntas iniciais.

Uma transformada nada mais é do que um processo de transformação de um problema inicial, que pode ser mais complexo do que gostaríamos, em um problema equivalente mas com menor grau de complexidade. Assim, ao resolvermos o problema transformado, supostamente mais fácil, obtemos mais rapidamente e com menor esforço a resposta do problema, mas não só do problema transformado, mas também do problema original. Essa é a validade e a utilidade de uma transformada, facilitar o cálculo de um dado problema.

Temos muitos exemplos na Matemática de problemas que podem ser transformados em outros mais fáceis de serem resolvidos.

Por exemplo, no cálculo integral você aprendeu pelo menos duas técnicas de integração que podem ser interpretadas como rotinas de transformações. Você se lembra de alguma delas?

Sim, a técnica de substituição de variáveis é uma forma de transformar uma integral não muito simples de ser resolvida em outra mais simples, como no caso do exemplo 1.

EXEMPLO

Uso de mudança de variável na resolução de integrais.

Seja a integral definida I dada por:

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) dx$$

Fazendo a transformação u=sen(x), temos que du = cos(x)dx e os limites passam para:

$u_{inf} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $u_{sup} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Assim a integral transformada é:

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} u du$$

Ainda no campo da resolução de integrais, você também aprendeu a técnica da integração por partes, que possui a mesma finalidade, facilitar a resolução da integral, como no caso do exemplo 2.

EXEMPLO

Uso da técnica da integração por partes na resolução de integrais.

Seja a integral definida I dada por:

$$I = \int_{1}^{4} x \cdot e^{3x} dx$$

Fazendo a transformação u=x e dv=e3x, du=dx e $v = \frac{1}{3} e^{3x}$. Assim a integral transformada é:

$$I = \frac{x \cdot e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_{1}^{4} e^{3x}\, dx$$

Outro caso que podemos listar que representa uma transformação é quando tratamos de integrais numéricas. Além das técnicas de integração já conhecidas por você, temos também as técnicas de resolução de integrais definidas por meio de aproximações numéricas, como por exemplo, a regra dos trapézios ou a regra dos 3/8 de Simpson, que são regras fechadas de Newton-Cotes. Apesar de ser um método de aproximação, também podemos entender como um tipo de transformação, já que transformamos a função original a ser integrada em outra função, no caso um polinômio, para simplificar o cálculo. Veja o exemplo 3.

EXEMPLO

Uso da regra dos 3/8 de Simpson para aproximar uma integral. Seja a integral I igual a dada no exemplo 2:

$$I = \int_{1}^{4} x \cdot e^{3x} dx$$

Utilizando uma aproximação da função através de polinômios de grau 3, considerando 7 pontos igualmente espaçados de h=0,5, temos uma transformação da integral da forma:

$$I = \frac{1,5}{8} \cdot \left(1y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 1y_6\right)$$

Com:

y_i=x_i·e^(3x_i)

x_0=1

x_i=x_(i-1)+0,5, para i=1,2, ..., 6

Assim, a integral original é transformada em uma expansão baseada na interpolação por um polinômio de grau 3.

Outro caso que podemos citar e que serve muito bem para entender o que ocorrerá com os problemas após o uso da Transformada de Laplace, são as transformações geradas pelo uso do logaritmo em uma função exponencial. Lembre-se que o logaritmo tem a capacidade de transformar uma operação de exponenciação em um produto, uma multiplicação em uma soma e uma divisão em uma diferença, ou seja, é capaz de simplificar os cálculos associados a um problema. Observe o exemplo 4.

EXEMPLO

Uso de logaritmos para simplificar uma equação exponencial. Seja a equação

$$20 = 15 \cdot (4,5)^{x-1}$$

Aplicando o logaritmo natural na equação, temos:

$\ln 20 = \ln[15 \cdot (4,5)^{x-1}]$ $\ln 20 = \ln 15 + \ln (4,5)^{x-1}$ $\ln 20 = \ln 15 + (x - 1) \ln 4,5$

E assim a equação inicial é transformada em uma equação linear que pode ser facilmente resolvida.

É claro que quando falamos em transformadas ou transformação não nos limitamos apenas a situações de cálculo.

Temos também transformações associadas a imagens e sons, como, por exemplo, as modificações feitas pelo aplicativo *photoshop* em uma foto, ou então, as alterações na gravação de uma música feita por um *mixer*.

Esses casos envolvem a utilização de transformadas, seja nas configurações da imagem ou na configuração de sinais e ondas.

Por exemplo, observe a transformação da onda representada pela linha pontilhada em outra onda mais suave representada pela linha contínua (figura 5.1), ou a mudança em uma imagem através de uma transformação por um filtro gaussiano (figura 5.2).
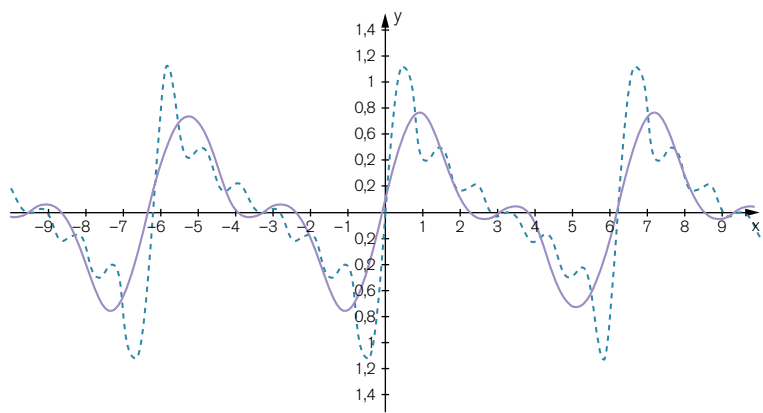
Figura 5.1 – Onda original com linha pontilhada transformada em outra onda em linha contínua.

É possível notar pelos exemplos discutidos anteriormente que é natural a utilização de transformações para se obter resultados melhores ou facilitações em termos de cálculos. A transformada de Laplace é um desses casos, uma transformada que possui como objetivo representar de maneira particular um determinado problema a fim de facilitar seu cálculo.
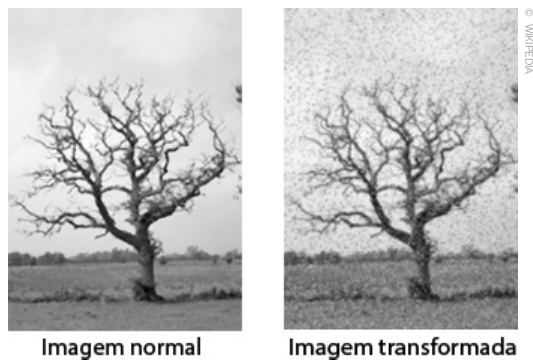
Figura 5.2 – Imagem original com transformação por um filtro gaussiano.

Contudo, temos mais uma discussão a fazer antes de começar a trabalhar com a transformada de Laplace. Você se lembra das integrais impróprias? Façamos uma recordação rápida.

Toda vez que calculamos uma integral definida, mesmo que não seja do seu interesse avaliar tal resultado, mas sempre podemos associar essa integral a uma medida de área. Assim, sempre é possível analisar uma integral definida do ponto de vista geométrico a uma área sob a curva, levando-se em conta uma região delimitada pelos limites da integral. Veja uma representação desse fenômeno no exemplo 5.

EXEMPLO

$$I = \int_{A}^{B} f(x)dx$$

Geometricamente, a integral pode ser representada pela figura 3.
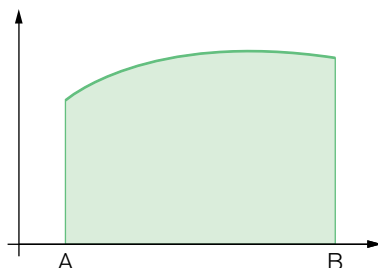
Figura 5.3 – Área sob a curva *f(x)* no intervalo [A,B], que equivale ao valor de *I*.

Note que essa representação é de fácil interpretação pois a integral é definida em um intervalo fechado. Agora, sempre teremos intervalos fechados nos limites de uma integral? O que pode ocorrer com esses limites de forma a termos um intervalo aberto?

Basta que o limite inferior seja igual a infinito negativo ou o superior seja igual a infinito positivo.

Considerando essas possibilidades, temos, na prática, três possibilidades de escrever uma integral definida em termos de limites abertos, mesmo que seja semiaberto, vejamos:

Caso 1: integral partindo do limite inferior A e indo até infinito, [A,+¥) ou x ∞ A.

Assim, temos:

$$I = \int_{A}^{\infty} f(x)dx$$

Caso 2: integral partindo do limite superior B, partindo de infinito negativo, (- ∞, B] ou x £ B.

Assim, temos:

$$I = \int_{-\infty}^{B} f(x)dx$$

Caso 3: integral partindo de infinito negativo e indo até infinito, (- ¥, ¥) ou x ÎR.

Assim, temos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

É natural admitir que nesses três casos não seja razoável pensarmos em uma medida de área, contudo, isso não impede que as integrais impróprias possam ser calculadas e até mesmo associadas a uma medida aproximada do que poderia ser admitida como a área.

Vejamos um exemplo de como trabalhar com as integrais impróprias.

EXEMPLO

Suponhamos uma integral definida do tipo exposto no caso 1, mas ao invés de denotarmos o limite superior por infinito, vamos denotar por M. Assim, seja a seguinte integral definida:

$$I = \int_{1}^{M} \frac{1}{x^2} dx = \int_{1}^{M} x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_{1}^{M} = -\frac{1}{x} \Big|_{1}^{M} = -\frac{1}{M} + 1$$

Como não sabemos o valor de M, não temos como determinar a área sob a função, mas podemos intuir que quanto maior for o valor de M, mais próximo estaremos da verdadeira área. Assim, se tomarmos o limite do valor da I com M tendendo para infinito, podemos encontrar uma boa aproximação para o resultado. Assim:

$$\text{Área Aproximada} = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}+1\right) = -\frac{1}{\infty}+1 = 0+1 = 1$$

Note que esse raciocínio nos leva a concluir que para trabalhar com integrais impróprias não basta dominar as técnicas de integração, mas também temos que dominar as operações com limites no infinito.

Do exposto, temos três importantes propriedades derivadas dos três casos apresentados anteriormente e que serão úteis na operação das transformadas de Laplace.

Propriedade 1: Seja f(x) uma função integrável em um intervalo [A,+¥). Então:

$$I = \int_{A}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_{A}^{B} f(x)dx$$

Propriedade 2: Seja f(x) uma função integrável em um intervalo (- ¥, B]. Então:

$$I = \int_{-\infty}^{B} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{B} f(x)dx$$

Propriedade 3: Seja f(x) uma função integrável em um intervalo (- ¥, +¥). Então:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} f(x)dx + \lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B} f(x)dx$$

EXEMPLO

Calcular a integral imprópria I dada por:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$$

Aplicando a propriedade 3, temos:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} e^{-x}dx + \lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B} e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\left(-\frac{1}{e^{x}}\right)\Bigg|_{A}^{0} + \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{x}}\right)\Bigg|_{0}^{B} = \lim_{A\to-\infty}\left(-\frac{1}{e^{0}}+\frac{1}{e^{a}}\right)+\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{B}}+\frac{1}{e^{0}}\right)=$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{a}}-1\right)+\lim_{B\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{B}}\right)=\left(\frac{1}{e^{-\infty}}-1\right)+\left(1-\frac{1}{e^{\infty}}\right)=$$

$$=\left(e^{\infty}-1\right)+\left(1-0\right)=\left(\infty-1\right)+1=\infty$$

Convencidos de que o uso de transformadas é bem comum na matemática e com essa breve revisão sobre as integrais impróprias, podemos partir para a transformada de Laplace. Vamos lá.

4.2 Propriedades da Transformada de Laplace.

Em 1812, Pierri Simon de Laplace (1749-1827) publicou uma obra intitulada Teoria Analítica, e nesta apresentou a Transformada de Laplace de uma função f(t), que passará a ser denotada por $\pounds\{f(t)\}$.

Da mesma forma que os cenários discutidos no tópico 4.1, a transformada de Laplace aparece como uma maneira de simplificar alguns tipos de problemas matemáticos, em especial algumas equações diferenciais.

Neste contexto, o que se espera com a aplicação da transformada é gerar, a partir de uma equação diferencial ordinária, uma equação algébrica mais fácil de ser trabalhada e resolvida. Com a solução dessa equação algébrica, fazemos o caminho de volta, através da inversa da transformada de Laplace para obter a solução da equação original.

Esquematicamente podemos entender o processo da seguinte forma:
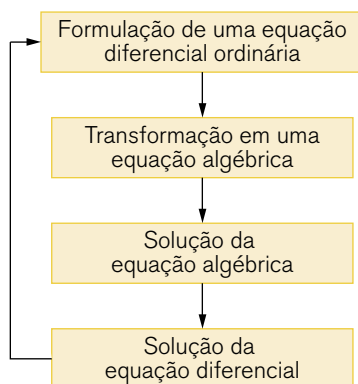
Figura 5.4 – Esquema de utilização da transformada de Laplace.

Bem, como então é a transformada de Laplace? Vejamos.

Definição: Dada uma função integrável f(t), tal que $f:[0,\infty) \to R$, a transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f(t)\}$, é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Para todo $s \geq 0$ de maneira que a integral tenha convergência e com $s = \sigma + i\omega$ uma variável do plano complexo

É possível notar que a transformada de Laplace envolve uma das formas discutidas anteriormente de integral imprópria. Assim, fica evidente que as propriedades associadas aos limites desse tipo de integral serão essenciais para se trabalhar com as transformadas.

Por motivos de conveniência e concordância com a literatura específica das transformadas de Laplace, utilizaremos a variável t como argumento da função original e a variável s para a função transformada. Ainda, a função original será sempre representada por letras minúsculas, *f(t)*, *g(t)*, *h(t)*, enquanto que a função transformada será representada por maiúsculas, *F(s)*, *G(s)*, *H(s)*.

CONEXÃO

Você pode notar que a variável s associada a transformada de Laplace é uma variável complexa. Não vamos abordar detalhes sobre os complexos neste capítulo, mas você pode aprofundar seus conhecimentos sobre as variáveis complexas lendo as referências listadas abaixo:
www.icmc.usp.br/~szani/complexa.pdf
www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/06CBM/6_CBM_67_09.pdf

Vejamos um exemplo inicial de utilização da transformada de Laplace.

EXEMPLO

Encontrar a transformada de Laplace para a função *f(t)=1*.

Aplicando a definição, temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \;\, dt$$

Aplicando agora as propriedades de integrais impróprias, temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-st} \cdot 1 \;\, dt = \lim_{B\to\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Bigg|_0^B =$$

$$= \lim_{B\to\infty} \left(-\frac{e^{-sB}}{s} + \frac{e^{-s0}}{s} \right) = \left(-\frac{e^{-s\infty}}{s} + \frac{e^{-s0}}{s} \right) = \left(-\frac{0}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

Assim $F(s) = \frac{1}{s}$, para s > 0.

Da mesma forma anterior, podemos encontrar a transformada de Laplace para uma gama enorme de funções, sejam polinomiais, trigonométricas ou exponenciais, ou até mesmo uma mistura das mesmas.

Faremos isso em um tópico posterior. Neste momento, a fim de facilitar a obtenção das transformadas de outras funções, é importante estabelecer algumas propriedades para a transformada de Laplace.

Propriedade da Linearidade:

Se a transformada de Laplace de f(t) é F(s) , para s > a1 e a transformada de Laplace de g(t) é G(s) , para s > a2, então considerando duas constantes a e b, temos:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathcal{L}\{f(t)\}+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}=\alpha F(s)+\beta G(s)$$

para s > max{a_1,a_2}.

Propriedade do Deslocamento:

Se a transformada de Laplace de f(t) é F(s), para s > a e considerando uma constante a, então a transformada da função

$$g(t)=e^{\alpha t}f(t)$$

será igual a

$$G(s)=F(s-\alpha)$$

para s > a + α.

Propriedade da Convolução:

Se a transformada de Laplace de f(t) é F(s) , para s > a_1 e a transformada de Laplace de g(t) é G(s) , para s > a_2, então considerando duas constantes a e b, temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\cdot g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}=F(s)\cdot G(s)$$

para s > max{a_1,a_2}.

Condições de Existência:

Para que exista a transformada de Laplace *F(s)* de *f(t)* é necessário que:

I) a função *f(t)* seja contínua em cada intervalo entre dois pontos quaisquer de descontinuidade, caso existam;

II) a função *f(t)* seja de ordem exponencial, ou seja, deve existir uma constante a, com a pertencente aos reais de modo que exista $\lim_{t\to\infty}|f(t)|e^{-at}$

III) o domínio de *F(s)* de *f(t)* será s > a.

Função de ordem exponencial é toda função tal que existam constantes c, M > 0 e T > 0 de maneira que |f(t)| ≤ M.e^{ct}, para todo t > T.

Para melhor entendimento do critério (i), observe a figura 5.5. Note que a função possui diversos pontos de continuidade, mas entre cada dois pontos a função é contínua. Isso basta para possibilitar o cálculo da transformada de Laplace.
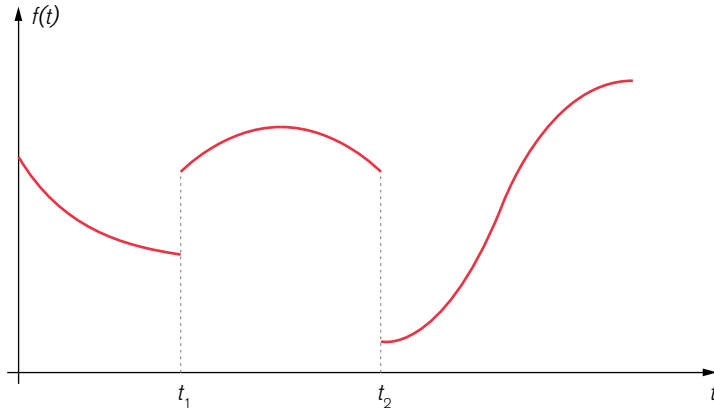
Figura 5.5 – Função *f(t)* descontínua nos pontos t_1 e t_2.

A verificação da validade das condições de existência da transformada de Laplace parte do conceito de função de ordem exponencial e da propriedade da soma de integrais definidas. Vejamos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = I_1 + I_2$$

Nota-se claramente que a primeira integral está sendo calculada em um intervalo contínuo então o seu valor existirá sem problemas. Contudo, na segunda integral não necessariamente, mas supondo que a função que está sendo integrada seja de ordem exponencial, valendo a relação $|f(t)| \leq M.e^{ct}$, para todo t > T, podemos afirmar que:

$$|I_2| \leq \int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq M \cdot \int_T^\infty e^{-st} \cdot e^{ct}\,dt = M \cdot \int_T^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = M \cdot \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

Assim, para s > c, como existe a convergência de I_2, a transformada também apresentada convergência, existindo, portanto, a transformada de Laplace para a função. Mas é importante atentar para o fato de que o resultado só é válido se a função for de ordem exponencial e se s > c.

Assim, para funções cuja velocidade de crescimento seja superior a função exponencial, não sendo, portanto de ordem exponencial, não existirá a transformada de Laplace.

Vejamos algumas representações gráficas para melhor compreensão. Nas figuras de 6 a 10 estão representadas funções exponenciais, através da linha contínua, e outros tipos de funções nas linhas pontilhadas.
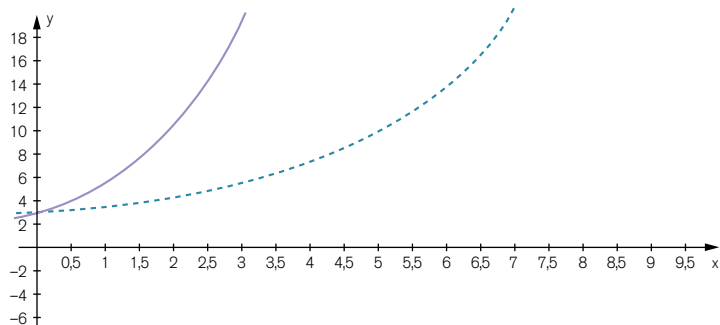
Figura 5.6 – Função $f(t)=e^{0,4t}+2$ é de ordem exponencial.
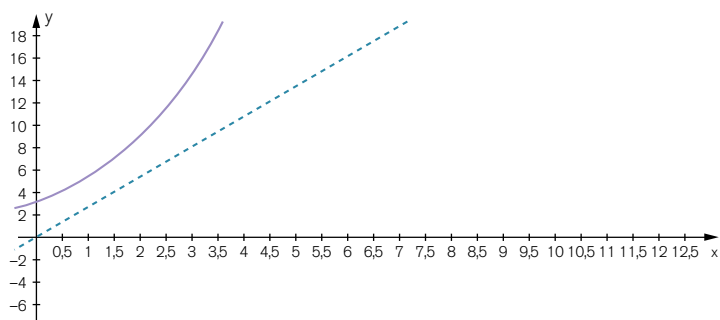
Figura 5.7 – Função $f(t)=2,5t$ é de ordem exponencial.
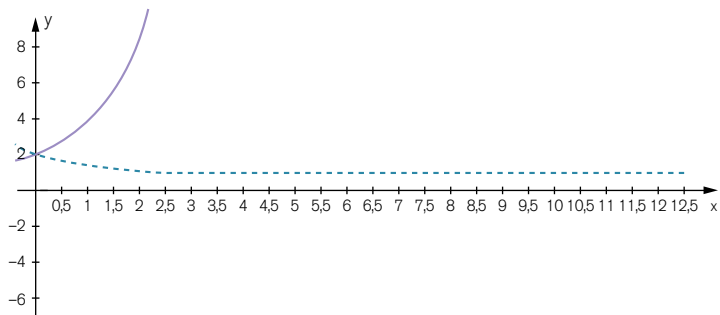
Figura 5.8 – Função $f(t)=e^{-t}+1$ é de ordem exponencial.
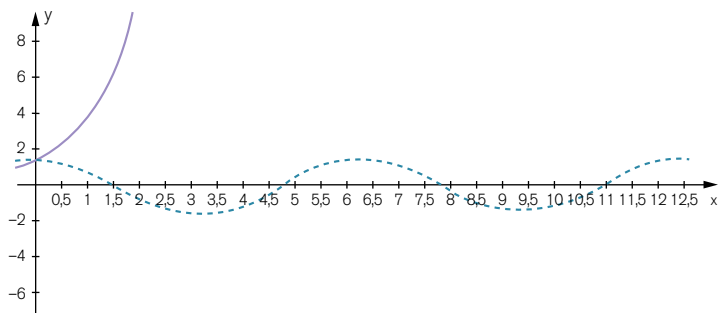
Figura 5.9 – Função *f(t)=1,5cos(t)* é de ordem exponencial.
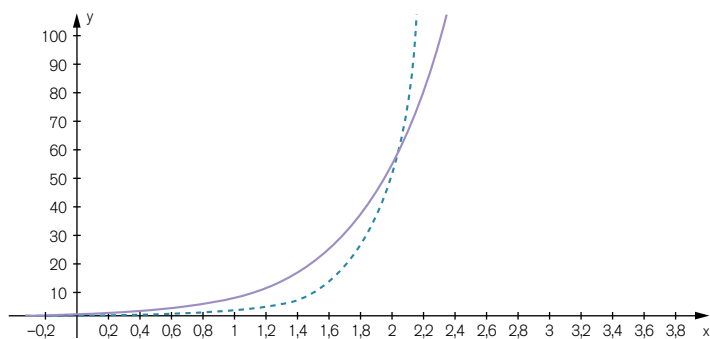
Figura 5.10 – Função $f(t) = e^{x^2}$ não é de ordem exponencial.

Aplicar a definição e as propriedades da transformada de Laplace é possível obter a transformadas para um conjunto bem amplo de funções, o que será útil nos casos de aplicações, visto que executando as transformadas *a priori*, podemos gerar uma tabela de resultados que podem ser consultados *a posteriori*.

Preparado? Vamos lá.

Vamos começar com a função constante f(t)=k. Anteriormente já vimos o desenvolvimento da transformada de Laplace para a função f(t)=1, mas como será a transformada para uma função genérica f(t)=k?

A definição será da forma:

$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^{\infty} e^{-st} k dt = k \lim_{B \to \infty} \int_0^{B} e^{-st} dt$$

Uma vez que a função f(t)=k é constante em t, então podemos resolver a integral por substituição, fazendo a substituição u=-st e, com isso, $dt = \frac{-1}{s} du$. Então,

$$\mathcal{L}\{k\} = k \lim_{B\to\infty} \int_0^B \frac{-1}{s} e^u du = \frac{-k}{s} \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^u du = \frac{-k}{s} \lim_{B\to\infty} \left(e^{-st} \Big|_0^B \right)$$

Aplicando os limites de integração, lembrando que $e^{-st} \to 0$ quando $t \to \infty$ e que $e^{-st} = 1$ quando t = 0, quando s > 0, temos:

$$\mathcal{L}\{k\} = \frac{-k}{s} \lim_{B\to\infty} \left(e^{-st} \Big|_0^B \right) = \frac{-k}{s} \lim_{B\to\infty} \left(e^{-sB} - e^{-s(0)} \right) = \frac{-k}{s}(0-1) = \frac{k}{s}$$

Ou seja, a transformada de Laplace para uma função do tipo f(t) = k será:

$$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$$

Válida para qualquer k real e com s>0.

Vejamos agora o caso para a função linear f(t) = t.

Pela definição, temos:

$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-st} t dt$$

Podemos dispensar a notação de limite para agilizar um pouco mais os cálculos, mas sempre lembrando da ideia de limite que deve ser levada em consideração para o cálculo da integral.

Para a resolução da integral devemos usar a técnica de integração por partes, onde:

$$\left(\int u dv = uv - \int v du \right)$$

Fazendo u = t, du = dt, dv = e^{-st} dt e $v = \frac{-1}{s} e^{-st}$, temos:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \frac{-t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{s} e^{-st} dt$$

Ou ainda,

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \left[\frac{-t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right] \Bigg|_0^\infty$$

Substituindo os limites de integração e lembrando que:

$$\lim_{B \to \infty} Be^{-sB} = 0$$

e

$$\lim_{B \to \infty} e^{-sB} = 0$$

Temos,

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \frac{0}{s} e^{-s(0)} + \frac{1}{s^2} e^{-s(0)} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

Portanto, a transformada de Laplace, F(s) (em maiúsculo e em função de s) para a função f(t) = t (em minúsculo e em função de t), será:

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Se desenvolvermos a transformada de Laplace para uma função quadrática, cúbica e assim por diante, ou seja, generalizando a função polinomial, com n = 1, 2, 3, 4,…, teremos a forma geral:

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Então, para uma função do tipo: $f(t) = at^2$, a transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}\{at^2\} = a.\mathcal{L}\{t^2\} = a.\frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2a}{s^3}$$

3) Conforme visto na seção anterior, para o caso em que temos somas de funções, quantas forem elas, aplicamos a transformada de Laplace em cada função (f(t) + g(t)), multiplicadas pelos fatores a e b. A transformada de Laplace, que neste caso é chamada de transformada linear, pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(af(t)+bg(t)\right)dt$$

Ou ainda, como:

$$F(s)+G(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\} = a.\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b.\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

Vamos resolver um exemplo para verificar como é mais fácil o desenvolvimento no caso em que algumas funções já têm sua transformada conhecida.

EXEMPLO

Seja a função quadrática dada por: f(t) = $3x^2 + 2x - 4$, encontre a transformada de Laplace para este caso.

Resolução: A forma geral da transformada de Laplace para a função dada será:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(3x^2+2x-4\right)dt$$

Ou ainda na forma:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(3x^2\right)dt + \int_0^\infty e^{-st}(2x)dt - \int_0^\infty e^{-st}(4)dt$$

Mas, como já sabemos a forma geral para a função polinomial, então podemos desenvolver a transformada de Laplace com os resultados já obtidos, ou seja:

$$F(s) = \mathcal{L}\{3x^2+2x-4\} = \mathcal{L}\{3x^2\} + \mathcal{L}\{2x\} + \mathcal{L}\{-4\}$$

Lembrando que $F(s)=\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, então teremos:

$$\mathcal{L}\{3x^2\}+\mathcal{L}\{2x\}+\mathcal{L}\{-4\}=3.\frac{2!}{s^{2+1}}+2.\frac{1!}{s^{1+1}}-4.\frac{0!}{s^{0+1}}$$

Resultando em:

$$F(s)=\mathcal{L}\{3x^2+2x-4\}=\frac{6}{s^3}+\frac{2}{s^2}-\frac{4}{s}$$

como sendo a transformada de Laplace para a função f(t) = $3x^2$ + 2x – 4.

Vejamos agora o caso em que a função original é da forma exponencial, ou f(t) = e^{at}. Podemos desenvolver a transformada de Laplace fazendo:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at}\right)dt=\int_0^\infty e^{-st+at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

Resolvendo a integral por substituição, fazendo u = –(s – a) t, então:

$$F(s)=\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\int_0^\infty \frac{1}{-(s-a)}e^u du=\frac{1}{-(s-a)}\int_0^\infty e^u du$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{-(s-a)}\left(e^{-(s-a)t}\right)\Big|_0^\infty=\frac{1}{-(s-a)}\left(0-e^{-(s-a).0}\right)$$

$$F(s)=\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{-(s-a)}(0-1)=\frac{1}{s-a}$$

Então, a transformada de Laplace da função exponencial f(t) = e^{at} será:

$$F(s)=\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$$

Considerando agora a função original como uma função trigonométrica do tipo f(t) = sen(at). Podemos desenvolver a transformada de Laplace fazendo:

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{sen(at)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(sen(at)\right)dt$$

Resolvendo a integral por partes, fazendo u = sen at, du = acos(at)dt e $dv = e^{-st}dt$, então $\int e^{-st}dt = \frac{-1}{s}e^{-st}$, e substituindo em ∫ udv = uv − ∫ vdu, temos:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \left.\frac{-e^{-st}senat}{s}\right|_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\left(at\right)dt$$

Sabendo que:

$$\lim_{B\to\infty} e^{-sB}sen\left(aB\right) = 0$$

Então,

$$\left.\frac{-e^{-st}senat}{s}\right|_0^\infty = 0$$

e

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\left(at\right)dt$$

Por partes, mais uma vez, teremos u = cos (at), du = −a sen(at) dt e dv = e^{-st} dt, então $v = \int e^{-st}dt = \frac{-1}{s}e^{-st}$, então:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{a}{s}\left[\left.\frac{-1}{s}e^{-st}\cos\left(at\right)\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{-a}{s}e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt\right]$$

Ou ainda na forma:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \left.\frac{-a}{s^2}e^{-st}cos\left(at\right)\right|_0^\infty - \frac{a^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt$$

Como

$$\lim_{B\to\infty} e^{-sB}cos\left(aB\right) = 0$$

Então,

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt$$

Agrupando as integrais, teremos:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt + \frac{a^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{a}{s^2}$$

Ou na forma:

$$\left(\frac{a^2}{s^2}+1\right)\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{a}{s^2}$$

Isolando a integral e fazendo $\frac{a^2}{s^2}+1=\frac{a^2+s^2}{s^2}$ teremos:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{as^2}{s^2\left(s^2+a^2\right)}$$

Ou ainda,

$$F\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{sen\left(at\right)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(sen\left(at\right)\right)dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

EXEMPLO

Qual a transformada de Laplace para a função f(t) = sen (3t)?

Resolução: Poderíamos resolver a integral e seguir todo o processo, mas é mais prático utilizarmos o resultado genérico encontrado para a função f(t) = sen(at), então,

$$F\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{sen\left(3t\right)\right\}=\frac{3}{s^2+9}$$

O desenvolvimento para a função f(t) = cos(at) é similar à f(t) = sen(at) e sendo assim, o resultado encontrado será:

$$F(s)=\mathcal{L}\{cos(at)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}(cos(at))dt=\frac{s}{s^2+a^2}$$

EXEMPLO

Qual a transformada de Laplace para a função f(t) = cos(4t)?

Resolução: Utilizando o resultado já encontrado, temos que a transformada de Laplace para a função f(t) = cos(4t), será:

$$F(s)=\mathcal{L}\{\cos(4t)\}=\frac{s}{s^2+16}$$

Dessa forma vemos que, sabendo os resultados das transformadas de Laplace de funções bases, podemos encontrar de forma bastante fácil o resultado para outras funções similares desenvolvidos genericamente.

Podemos ainda verificar a forma da transformada para funções contínuas por partes. Neste caso, devemos analisar separadamente parte da função, somando os resultados individuais. Então, vejamos.

EXEMPLO

Para a função com duas sentenças dada por:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & para 0\le t\le 5 \\ 3, & para\ \ t\ge 5 \end{cases},$$

calcule a sua transformada de Laplace.

Resolução: A partir da definição:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{T}e^{-st}f(t)dt+\int_T^{\infty}e^{-st}f(t)dt=I_1+I_2$$

Podemos construir a transformada em termos das integrais da forma:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = I_1 + I_2$$

Como a primeira das duas integrais é igual a zero, então será necessário resolver apenas a segunda derivada, resultando em:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 3\int_5^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{-3e^{-st}}{s}\right|_5^\infty = 0 + \frac{3e^{-s(5)}}{s}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3e^{-5s}}{s}$$

É interessante observar que para cada tipo de função existe uma regra definida para a forma da transformada de Laplace. Dando continuidade à discussão das propriedades e regras associadas às transformadas, com os resultados que serão apresentados nos dois tópicos a seguir, é possível gerar uma diversidade bem significativa de formas para as transformadas, que serão apresentadas posteriormente em forma de tabela, de maneira a facilitar a aplicação, da mesma maneira que ocorre com as tabelas de derivadas e integrais.

Por falar em derivadas e integrais, vejamos o que ocorre quando operamos as transformadas nesses aspectos.

4.3 Derivada da transformada e transformada da derivada.

Vamos iniciar com as derivadas. De início, o que ocorre quando aplicamos o conceito da transformada de Laplace na derivada de uma função?

Você pode estar se perguntando: qual a importância disso? Bem, como já mencionado anteriormente, um dos objetivos da transformada de Laplace é simplificar o manuseio de equações diferenciais transformando-as em equações algébricas. Para isso, as transformadas devem ser aplicadas nas equações diferenciais e você vai se lembrar que além das variáveis e das funções, as equações diferenciais também possuem derivadas. Assim, ao calcular a transformada de uma EDO, estamos transformando também as derivadas.

Vejamos o que ocorre com a transformada de uma derivada de primeira ordem. Suponhamos uma função f(t) integrável, tal que f:[0,∞) → R, e a transformada de Laplace L{f(t)}. Considerando a derivada de primeira ordem de f(t) como sendo f'(t) então, pela definição da transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

Resolvendo a integral por parte, temos u=e^(-st) e dv=f^' (t).

Assim, du = − s · e^{-st} e v = f(t). Substituindo na regra da integral por partes, temos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

O primeiro termo pode ser resolvido utilizando limite, da forma:

$$\lim_{B\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\right]\Big|_0^B = \lim_{B\to\infty}\left[e^{-sB} f(B) - e^{-s0} f(0)\right] = \left[0 - f(0)\right] = -f(0)$$

O segundo termos, se você observar bem, é exatamente a transformada da função f(t). Assim, o resultado fica reduzido a:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}$$

ou da forma:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\cdot F(s) - f(0)$$

Fazendo agora para a derivada de segunda ordem, temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\,dt$$

Resolvendo a integral por parte, temos u = e^{-st} e dv = f'' (t).

Assim, du = −s · e^{-st} e v = f'(t). Substituindo na regra da integral por partes, temos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st}f'(t)\Big|_{0}^{\infty} + s\int_{0}^{\infty} e^{-st}f'(t)dt$$

O primeiro termo pode ser resolvido utilizando limite, da forma:

$$\lim_{B\to\infty}\left[e^{-st}f'(t)\right]\Big|_{0}^{B} = \lim_{B\to\infty}\left[e^{-sB}f'(B) - e^{-s0}f'(0)\right] = \left[0 - f'(0)\right] = -f'(0)$$

Novamente no segundo termo temos uma transformada, mas neste caso da função f'(t). Assim, o resultado fica reduzido a:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\cdot\mathcal{L}\{f'(t)\}$$

Substituindo a transformada da derivada de primeira ordem, temos finalmente que:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\cdot\left[s\cdot F(s) - f(0)\right]$$

E portanto:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0)$$

Ou então, da forma:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$$

Fazendo agora para a derivada de terceira ordem, temos:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}f'''(t)dt$$

Resolvendo a integral por parte, temos u = e^{-st} e dv = f''' (t).

Assim, du = − s · e^{-st} e v = f'' (t). Substituindo na regra da integral por partes, temos:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = e^{-st}f''(t)\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}f''(t)dt$$

O primeiro termo pode ser resolvido utilizando limite, da forma:

$$\lim_{B\to\infty}\left[e^{-st}f''(t)\right]\Big|_0^{B} = \lim_{B\to\infty}\left[e^{-sB}f''(B) - e^{-s0}f''(0)\right] = \left[0 - f''(0)\right] = -f''(0)$$

Novamente no segundo termo temos uma transformada, mas neste caso da função f''(t). Assim, o resultado fica reduzido a:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = -f''(0) + s\cdot\mathcal{L}\{f''(t)\}$$

Substituindo a transformada da derivada de segunda ordem, temos finalmente que:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = -f''(0) + s\cdot\left[s^2\cdot F(s) - s\cdot f(0) - f'(0)\right]$$

E portanto:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = -f^{''(0)} + s^3\cdot F(s) - s^2\cdot f(0) - s\cdot f'(0)$$

Ou então, da forma:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^3\cdot F(s) - s^2\cdot f(0) - s\cdot f^{'(0)} - f''(0)$$

Comparando os três casos, podemos generalizar o que ocorre com a transformada de Laplace de uma derivada de ordem n, gerando a seguinte propriedade:

Transformadas de Derivadas:

Sejam as funções f(t), f'(t), f''(t), f'''(t), ..., f(n-1)(t) contínuas em [0, ¥) e todas de ordem exponencial e a função f(n)(t) contínua por partes em [0, ¥), então a transformada de qualquer derivada será igual a:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f^{'(0)} - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Essa propriedade será muito útil em situações de transformada de equações diferenciais, como veremos mais adiante.

Da mesma maneira que temos uma transformada de uma derivada, podemos ter também a derivada de uma transformada. Conforme colocado por ZILL e CULLEN (2001), tomando a transformada de uma função f(t) e calculando a sua derivada em relação a s, temos:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[e^{-st} f(t)\right]dt = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

Logo, temos que:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Apesar do objetivo do resultado ser mostrar o que ocorre com a derivada da transformada, o mesmo acaba sendo mais uma forma de generalizar os processos de transformada, no caso quando temos a transformada do produto da função f(t) por um monômio tn.

De maneira generalizada, temos outra importante propriedade:

Transformada de funções do tipo $t^n f(t)$:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

CONEXÃO

Além das derivadas, podemos trabalhar também com as integrais das transformadas, ou as transformadas de integrais. Para maiores detalhes sobre essas propriedades, estudo o artigo de VIANA, R.L. Transformadas Integrais. DF, UFPA, Curitiba (PA), 2013, disponível em

fisica.ufpr.br/viana/metodos/transformadas.pdf

Acessado em 29/06/2015.

4.4 A transformada Inversa.

Vimos anteriormente, na figura 4 em especial, que a transformada de Laplace pode ser utilizada para simplificar a operação matemática de algumas equações diferenciais mais simples e os resultados anteriores em especial quanto às derivadas serão fundamentais para isso.

Contudo, temos ainda outro conceito a ser discutido. Na figura 4, é possível notar que a transformada será capaz de reduzir uma EDO em uma equação algébrica, facilitando a sua resolução, mas a partir dessa resolução, temos que transformar de novo, fazer a volta da transformação, a inversa da transformação para associar a solução da equação algébrica à solução da EDO.

Como já fizemos anteriormente o cálculo da transformada para algumas funções típicas é claro que a inversa da transformada, L^{-1}, deve retornar para a função original. Vamos verificar cinco casos principais.

Resultado 1.

Para f(t)=k temos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$

Então, a inversa da transformada será igual a: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k$

Resultado 2.

Para f(t)=ktn temos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{kt^n\} = \frac{kn!}{s^{n+1}}$

Então, a inversa da transformada será igual a: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{kt^n\} = \frac{kn!}{s^{n+1}}$

Resultado 3.

Para f(t)=eat temos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

Então, a inversa da transformada será igual a: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{kn!}{s^{n+1}}\right\} = kt^n$

Resultado 4.

Para f(t)=sen(kt) temos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{sen(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$

Então, a inversa da transformada será igual a: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = sen(kt)$

Resultado 5.

Para f(t)=cos(kt) temos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

Então, a inversa da transformada será igual a: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = cos(kt)$

Vamos exemplificar o uso das transformadas inversas para melhor compreensão.

EXEMPLO

Calcular a transformada inversa da função $F(s) = \frac{12}{s^6}$

Podemos reescrever a função da seguinte forma:

$$F(s) = \frac{12}{s^6} = 12 \cdot \frac{1}{s^6} = 12 \cdot \frac{1}{s^{5+1}} = 12 \cdot \frac{5!}{5!} \cdot \frac{1}{s^{5+1}} = \frac{12}{5!} \cdot \frac{5!}{s^{5+1}}$$

A função está exatamente como mostrado no resultado 1. Assim, a transformada inversa será igual a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{s^6}\right\} = \frac{12}{5!} \cdot t^5 = \frac{12}{120} \cdot t^5 = 0{,}1t^5$$

EXEMPLO

Calcular a transformada inversa da função $F(s) = \frac{3}{s^2+16}$

Podemos reescrever a função da seguinte forma:

$$F(s) = \frac{3}{s^2+16} = 3 \cdot \frac{1}{s^2+16} = 3 \cdot \frac{1}{s^2+4^2} = 3 \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{s^2+4^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{s^2+4^2}$$

A função está exatamente como mostrado no resultado 4. Assim, a transformada inversa será igual a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+16}\right\}=\frac{3}{4}\cdot sen(4t)=0{,}75sen(4t)$$

EXEMPLO

Calcular a transformada inversa da função $F(s)=\dfrac{-4+5s}{s^2+9}$

Podemos reescrever a função da seguinte forma:

$$F(s)=\frac{-4+5s}{s^2+9}=\frac{-4}{s^2+3^2}+\frac{5s}{s^2+3^2}=\frac{-4}{3}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}+5\cdot\frac{s}{s^2+3^2}$$

A função está exatamente como mostrado nos resultados 4 e 5. Assim, a transformada inversa será igual a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4+5s}{s^2+9}\right\}=\frac{-4}{3}\cdot sen(3t)+5\cdot\cos(3t)=5\cdot\cos(3t)-0{,}75\cdot sen(3t)$$

EXEMPLO

Encontre a função original f(t), dada a transformada de Laplace na forma:

$$F(s)=\frac{7s-16}{s^2-5s+6}$$

Resolução: Devemos inicialmente fatorar o denominar, dado por:

$$s^2-5s+6=(s-2)(s-3)$$

e em seguida desenvolver as frações parciais, ou seja:

$$\frac{7s-16}{s^2-5s+6}=\frac{7s-16}{(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}$$

Desenvolvendo a fração parcial para encontrar os valores de A e B, temos:

$$\frac{7s-16}{(s-2)(s-3)}=\frac{A(s-3)}{s-2}+\frac{B(s-2)}{s-3}=\frac{As-3A+Bs-2B}{(s-2)(s-3)}$$

E de forma comparativa, agrupando os termos em s e constantes, temos:

$$\frac{7s-16}{(s-2)(s-3)}=\frac{(A+B)s+(-3A-2B)}{(s-2)(s-3)}$$

Ou seja, (A + B) = 7 e (-3A − 2B) = -16. Então, resolvendo o sistema linear para determinar os valores de A e B, temos:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ -3A-2B=-16 \end{cases}$$

Isolando o termo A em uma das equações e substituindo na outra equação, encontramos o valor de B = 5. A partir do valor de B podemos encontrar o valor de A = 2.

Então, a expressão na forma de fração parcial será escrita como:

$$\frac{7s-16}{s^2-5s+6}=\frac{2}{s-2}+\frac{5}{s-3}$$

Lembrando que

$$e^{at}=\frac{1}{s-a}$$

Podemos escrever a função f(t) fazendo a analogia entre as expressões, considerando ainda as constantes multiplicativas, ou seja:

$$\frac{2}{s-2}=2e^{2t}$$

$$\frac{5}{s-3}=5e^{3t}$$

Então,

$$f(t)=2e^{2t}+5e^{3t}$$

4.5 Tabela da transformada de Laplace.

Considerando todos os resultados obtidos anteriormente, podemos organizá--los de uma forma adequada para consultas posteriores em forma de tabela.

Além dos resultados já obtidos e levando-se em conta resultados colocados em ZILL e CULLEN (2001), apresentada uma lista de funções e suas respectivas funções transformadas de Laplace na tabela 1.

	FUNÇÃO F(T)	TRANSFORMADA F(S)=L{F(T)}
1	k	$\frac{k}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\neq}{s}}$
5	$t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\neq}}{2s^{3/2}}$
6	sen(kt)	$\frac{k}{s^2+k^2}$
7	cos (kt)	$\frac{k}{s^2-k^2}$
8	senh(kt)	$\frac{k}{s^2-k^2}$
9	cos (kt)	$\frac{k}{s^2-k^2}$
10	sen^2 (kt)	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11	cos^2 (kt)	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
12	$senh^2$ (kt)	$\frac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$

13	$\cosh^2(kt)$	$\frac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
14	tsen(kt)	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
15	tcos (kt)	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
16	sen(kt) + ktcos(kt)	$\frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
17	sen(kt) – ktcos(kt)	$\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
18	tsenh(kt)	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
19	t cosh(kt)	$\frac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
20	1 – cos (kt)	$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
21	kt – sen (kt)	$\frac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
22	cos (at) – cos(bt)	$\frac{s(b^2-a^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
23	sen(kt) senh(kt)	$\frac{2sk^2}{s^4+4k^4}$
24	sen(kt) cosh(kt)	$\frac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
25	cos(kt) senh(kt)	$\frac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$
26	cos(kt) cosh(kt)	$\frac{s^3}{s^4+4k^4}$
27	$\frac{2(1-\cos(at))}{t}$	$ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$
28	$\frac{2(1-\cosh(at))}{t}$	$ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$
29	$\frac{sen(at)}{t}$	$arctg\frac{a}{s}$

30	$\frac{sen(at)\cos(bt)}{t}$	$\frac{1}{2} arctg \frac{a+b}{s} + \frac{1}{2} arctg \frac{a-b}{s}$
31	e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$
32	te^{kt}	$\frac{1}{(s-k)^2}$
33	$t^n e^{kt}$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$
34	$\frac{1}{\sqrt{\ t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
35	$\frac{k}{2\sqrt{\ t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$e^{-k\sqrt{s}}$
36	e^{at} sen(kt)	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
37	e^{at} cos(kt)	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$
38	e^{at} senh(kt)	$\frac{k}{(s-a)^2 - k^2}$
39	e^{at} cosh(kt)	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$
40	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
41	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
42	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$ln \frac{s-a}{s-b}$
43	e^{at} f(t)	F (s – a)
44	f' (t)	sF(s) – f(0)
45	f'' (t)	s^2 F(s) – sf(0) – f'(0)
46	$f^{(n)}$ (t)	s^n F(s) – $s^{(n-1)}$ f(0) –…$f^{(n-1)}$ (0)
47	$f(t) = \begin{cases} 0, & para 0 \leq t < a \\ 1, & para\ \ t \geq a \end{cases}$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Tabela 5.1 – Transformadas de Laplace

De posse da tabela e de todas as propriedades discutidas anteriormente, podemos iniciar as aplicações das transformadas de Laplace na resolução de equações diferenciais.

4.6 Aplicações.

Agora nesta seção, vamos estudar como as equações diferenciais são resolvidas com a ajuda das transformadas de Laplace, uma vez que já vimos todos os conceitos necessários para isso.

1. Determine a solução da equação diferencial de segunda ordem, dados os valores iniciais, y(0)=0 e y'(0)=2, sendo y"+y'-2y=4t.

Iniciamos aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial:

Iniciamos aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial:

$$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y')-2\mathcal{L}(y)=4\mathcal{L}(t)$$

Com os valores da tabela da seção anterior temos de (45), (44), (2) e lembrando que L(y) = F(s), que é transformada de interesse, podemos escrever:

$$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+sF(s)-f(0)-2\ \ F(s)=4\frac{1}{s^2}$$

Substituindo os valores iniciais como f(0) = 0 e f'(0) = 2, temos:

$$s^2F(s)-s(0)-2+sF(s)-0-2\ \ F(s)=4\frac{1}{s^2}$$

Agrupando os termos em F(s), temos:

$$\left(s^2+s-2\right)F(s)=\frac{4}{s^2}+2=\frac{4+2s^2}{s^2}$$

Isolando F(s) na expressão, fatorando o denominador e separando a expressão em frações parciais, temos:

$$F(s)=\frac{4+2s^2}{s^2\left(s^2+s-2\right)}=\frac{4+2s^2}{s^2(s+2)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s-1}$$

Tirando o mínimo múltiplo comum e agrupando os termos em s3, s2, s e constantes, temos:

$$F(s)=\frac{4+2s^2}{s^2(s^2+s-2)}=\frac{s^3(A+C+D)+s^2(A+B-C+2D)+s(B-2A)-2B}{s^2(s+2)(s-1)}$$

Fazendo a associação entre os numeradores da expressão, o sistema linear a ser resolvido será:

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ A+B-C+2D=2 \\ B-2A=0 \\ -2B=4 \end{cases}$$

De onde você pode ver facilmente, partindo da última equação, determinando B = -2 e fazendo as devidas substituições chegamos aos valores de A = -1, C = -1 e D = 2.

Com isso, a transformada de Laplace passa a ser vista como:

$$F(s)=\frac{-1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-1}$$

Associando os resultados da tabela de transformadas de Laplace por 1, 2 e 31, temos:

$$f(t)=-1-2t-e^{-2t}+2e^t$$

É um excelente exercício fazer a verificação do resultado na equação diferencial. Tente e verifique a veracidade do resultado para ter maior confiança no método.

2. A equação diferencial em que y é uma função de t (f(t))

$$y''+4y=t$$

Está sujeita às condições iniciais y(0) = 2 e y'(0) = 3.

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, temos como resultado:

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t)$$

Da tabela de transformadas de Laplace, 2 e 45, e ainda lembrando que L(y) = F(s), então:

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + 4F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Ou ainda,

$$s^2F(s) + 4F(s) - 2s - 3 = \frac{1}{s^2}$$

Ou seja,

$$(s^2 + 4)F(s) = 2s + 3 + \frac{1}{s^2}$$

Então,

$$F(s) = \frac{3}{(s^2 + 4)} + \frac{2s}{(s^2 + 4)} + \frac{1}{s^2(s^2 + 4)}$$

O último termo deve ser dividido em duas frações na forma de frações parciais, obtendo:

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^2 + 4} = \frac{s^2(A + B) + 4A}{s^2(s^2 + 4)}$$

Resolvendo o sistema linear em A e B, temos $A = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{-1}{4}$.

Com isso, F(s) torna-se:

$$F(s) = 3\left(\frac{1}{(s^2 + 4)}\right) + \frac{2s}{(s^2 + 4)} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{(s^2 + 4)}\right)$$

Fazendo a operação entre o primeiro e o último termo da expressão e manipulando algebricamente o resultado para poder ser comparado à transformada de Laplace da tabela no. 6 e ainda utilizando as de no. 7 e 2, temos:

$$F(s)=\left(\frac{11}{8}\right)\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)+2\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

Ou seja,

$$f(t)=\left(\frac{11}{8}\right)sen2t+2cos2t+\frac{t}{4}$$

Sendo essa a solução da equação diferencial que você também pode conferir substituindo o resultado, além de sua segunda derivada, na equação diferencial.

3. [Adaptado de Simmons e Krantz] Determine a solução da equação diferencia abaixo sujeita às seguintes condições iniciais y(0) = 0 e y'(0) = 3.

$$y''+2y'+5y=3e^{-t}sent$$

Mais uma vez devemos aplicar a transformada de Laplace na equação diferencial

$$\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+5\mathcal{L}(y)=3\mathcal{L}\left(e^{-t}sent\right)$$

A partir dos resultados da tabela de transformadas de Laplace 36, 44 e 45, podemos escrever:

$$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+2\left(sF(s)-f(0)\right)+5F(s)=3\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

Considerando as condições iniciais, temos:

$$s^2F(s)-s(0)-3+2\left(sF(s)-0\right)+5F(s)=3\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

Isolando F(s), a expressão é escrita como:

$$F(s)(s^2+2s+5)=3\left(\frac{1}{s^2+2s+2}\right)+3$$

E ainda,

$$F(s)=3\left(\frac{1}{(s^2+2s+2)\left(s^2+2s+5\right)}\right)+\frac{3}{s^2+2s+5}$$

O primeiro termo da expressão deve ser escrito como frações parciais na forma:

$$\frac{3}{(s^2+2s+2)\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{1}{(s^2+2s+2)}-\frac{1}{\left(s^2+2s+5\right)}$$

Adaptada novamente à expressão de $F(s)F(s)$, temos:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}-\frac{1}{s^2+2s+5}+\frac{3}{s^2+2s+5}$$

Ou na forma:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}+\frac{2}{s^2+2s+5}$$

Escrevendo os dois denominadores na forma de produtos notáveis, temos:

$$F(s)=\frac{1}{\left(s-(-1)\right)^2+1}+\frac{2}{\left(s-(-1)\right)^2+2^2}$$

Recorrendo mais uma vez a transformada 36 da tabela, a função f(t) passa a ser:

$$f(t)=e^{-t}sent+e^{-t}sen(2t)$$

Como mais uma verificação, faça a substituição da função e suas derivadas na equação diferencial para conferir se a função realmente é solução da mesma.

ATIVIDADES

13. Para os exercícios abaixo obtenha a transformada de Laplace a partir da tabela:

a) $f(t) = 3t^5$

b) $f(t) = 3t^2 - e^{-7t} + 8$

c) $f(t) = 5\,(e^t - e^{-t})^2$

d) $f(t) = 2 - 2\cos(3t)$

e) $f(t) = 2t^3 + 4e^{-3t} - 7\,\text{sen}^2\,2t$

14. Para os exercícios abaixo obtenha a transformada inversa:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+49}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+2}\right\}$

15. Encontre a solução das equações diferenciais abaixo a partir das transformadas de Laplace:

a) $y' + 6y = e^{3t}$, para $y(0) = 1$

b) $y'' - 6y' + 9y = t^2\,e^{3t}$, para $y(0) = 2$ e $y'(0) = 6$

REFLEXÃO

Discutimos neste capítulo as transformadas de Laplace, que, assim como outros métodos de transformação, visa a melhorar o cenário de um problema ou modelo matemático a fim de torná-los mais simples.

Em especial, as transformadas de Laplace servem para simplificar o cálculo de alguns tipos de equações diferenciais.

No entanto, as transformadas não sevem apenas para simplificar cálculos, mas servem também para modificar a forma de representação de um modelo matemático.

Por exemplo, em estudos de variação dos preços de um ativo na bolsa de valores, o que se observa é uma variação muito acentuada com um gráfico formado por ciclos com muitos

picos. Para se interpretar o que ocorre com o preço é comum adotar funções especiais, denominadas de filtros, que possam suavizar o comportamento, como por exemplo, médias móveis, modelos autoregressivos ou splines. Todos esses filtros são funções de transformações, são transformadas, com o objetivo de produzir novas funções.

Em situações de sinais elétricos ou de ondas, como as ondas quadradas associadas aos bits do computador, existe uma classe especial de transformada, denominada transformada de Fourier, que estudaremos no próximo capítulo.

CONCEITO

Alguns termos citados neste capítulo são de especial importância e sendo assim reforçamos seus conceitos neste glossário.

11. Integral imprópria: integrais definidas de maneira que pelo menos um dos limites de integração seja igual ao infinito e para a resolução dependem do cálculo de limites;
12. Transformada de Laplace: a transformada L{f(t)} de uma função f(t) integrável em um intervalo [0, ∞) é definida por uma integral imprópria de uma função de ordem exponencial do tipo $e^{-stf}(t)$;
13. Função de ordem exponencial: é uma função f(t) cuja taxa de crescimento é menor do que uma função exponencial e é tal que $|f(t)| \leq Me^{ct}$;

LEITURA

Para se aprofundar nos conceitos de transformadas de Laplace e suas aplicações, recomendamos a leitura das obras listadas abaixo:

ANDRADE, D. Transformada de Laplace. DM, Universidade Estadual de Maringá.
www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/transforlaplace.pdf
Acessado em 29/06/2015.
LIMA, P.C. Equações Diferenciais. DM, Universidade Federal de Minas Gerais.
www.mat.ufmg.br/~lima/apostilas/apostila_eda.pdf
Acessado em 29/06/2015.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W.E e DiPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

EDWARDS JR, C.H. e PENNEY, D.E. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno**. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.

ZILL, D.G **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Thompson Pioneira, 2003.

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. Volumes 1 e 2. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

5

Séries de Fourier

Neste quinto e último capítulo, vamos discutir os conceitos e propriedades das séries infinitas. Sobre as séries infinitas, ampliaremos a discussão considerando uma série muito especial, a série de Fourier, que possui muitos aplicações práticas associadas a transformação de funções em uma série de senos e cossenos.

OBJETIVOS

- Entender os conceitos de séries infinitas e suas propriedades.
- Entender os conceitos de séries periódicas e trigonométricas.
- Entender as conceituações de séries pares e ímpares.
- Desenvolver as séries de Fourier.

O ano era 1822, o país era a França, quando foi publicado um trabalho sobre a teoria analítica do calor, o autor, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Este trabalho, poucos anos antes de sua morte, marca definitivamente a presença de Fourier na Matemática e na Física e a sua transformada, a série de Fourier.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

A elaboração de seu trabalho, como apontado por MATOS (2002), foi estudar a propagação do calor em um corpo sólido, um trabalho focado na área de Termodinâmica, mas o que Fourier não esperava é que os resultados que obteve tivessem um impacto da magnitude que houve.

Durante mais de 150 anos a evolução das ciências e tecnologias deve parte de sua história aos resultados obtidos por Fourier.

Muitos são os exemplos práticos, e alguns talvez de seu cotidiano, que utilizam a transformada de Fourier.

Apenas para ilustrar a você, suponha que você selecione uma imagem extraída da internet, de um site que contenha informações de seu interesse. Ao gravar a imagem em seu computador, você pode decidir editá-la, melhorando a sua resolução e depois gravá-la novamente, por exemplo, no formato JPG (Joint Photographic Experts Group). Bem, esse procedimento lhe pareceu familiar? Alguma vez você já fez isso? Certamente sim, pois então, implicitamente, já fez uso da transformada de Fourier. Isso mesmo, toda vez que processamos imagens, mesmo que seja através de um aplicativo computacional, estamos na verdade executando uma transformação da imagem via séries de Fourier. É claro que estamos suprimindo muitos detalhes técnicos, mas o certo é que os resultados obtidos por Fourier são fundamentais para muitos eventos atuais.

Outro exemplo, apenas para motivá-lo, está bem associado a um tipo de lazer bem conhecido, o uso das máquinas de karaokê. Nessas máquinas, as

músicas que conhecemos aparecem sem o vocal, apenas com o som dos instrumentos, de maneira que o objetivo é reproduzir a letra da música. Bem, o isolamento do vocal e sua retirada da música ocorrem pelo uso das séries de Fourier.

Assim, situações de modulação e limpeza de sinais, como por exemplo, o sinal obtido pelo eletrocardiograma, processamento de imagens, como por exemplo, a limpeza de impressões digitais para facilitar o reconhecimento pelos bancos de dados policiais, processamento de áudios, como por exemplo, o isolamento de instrumentos musicais para a mixagem de músicas, enfim, muitos casos utilizam a transformada desenvolvida por Fourier.

Nessa altura você deve estar se perguntando, qual é a transformada de Fourier? Do que trata a série de Fourier?

Bem, no trabalho publicado em 1822, a essência do resultado obtido por Fourier, e melhor concebido devido a contribuição de diversos matemáticos e físicos ao longo da História, é que inicialmente Fourier provou ser possível representar a onda de propagação através de uma combinação de funções periódicas, que trataremos mais a frente, e o que é mais surpreendente é que essa combinação de funções periódicas pode, de fato, representar qualquer função ou comportamento variacional. Esse resultado é excelente, pois com o seu uso, podemos além dos exemplos já discutidos, transformar uma função matemática mais complicada em outra função mais simples e fácil de ser manipulada.

É claro que o trabalho envolvido na obtenção da representação correta da série de Fourier, que nada mais é do que essa combinação de funções periódicas, nem sempre é simples, mas tem muitas aplicações práticas.

Não pretendemos neste livro levá-lo a um aprofundamento matemático severo e áspero, mas ao mesmo tempo nossa intenção é que você compreenda como obter a série de Fourier para depois poder aplicá-la em situações típicas de seu curso.

Para isso, vamos caminhar de uma forma natural e detalhada, construindo o caminho até a série de Fourier pedaço a pedaço, de maneira que fique intuitivo compreender as ideias iniciais dos resultados de Fourier.

Vamos lá. Preparado?

De início, vamos entender o que é uma série infinita.

5.1 Conceitos sobre séries infinitas.

Com certeza você já ouviu falar de progressão aritmética e progressão geométrica. Pois bem, uma progressão aritmética é uma sequência numérica de termos que variam em função de uma razão aditiva, enquanto que a progressão geométrica é uma sequência de termos que variam em função de uma razão multiplicativa. Ambas podem ter seus termos somados, inclusive você aprendeu as fórmulas da soma de uma PA e de uma PG. Pois bem, quando decidimos calcular a soma de uma sequência numérica, temos uma série.

Assim, uma série nada mais é do que a soma das parcelas de uma sequência.

Não é muito difícil imaginar o que é uma série infinita. Isso mesmo, séries infinitas são somas de sequências que possuem infinitos termos.

É claro que o fato de possuir infinitos termos gera uma pergunta inevitável: Se a sequência possuir infinitos termos como é possível calcular a soma dessa sequência?

Bem, para avaliar a possibilidade de obter a soma, temos que recorrer a outro conceito, o estudo da convergência da série.

Como explicado em MATOS (2002), considerando uma sequência numérica, é natural supor que a mesma será convergente se possuir um limite L, ou seja, supondo uma sequência $\{a_n\}$ então $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = L$. Sempre que houver um limitante para a sequência a mesma é dita ser convergente, caso contrário, se o limite for igual a infinito, a sequência é divergente. Por exemplo:

EXEMPLO

Verifique se a sequência harmônica $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ é ou não convergente.

Calculando o limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Assim, a sequência harmônica é convergente e o seu limite L = 0.

EXEMPLO

Verifique se a sequência $\{a_n\} = \dfrac{n}{n+1}$ é ou não convergente.

Calculando o limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Assim, a sequência é convergente e o seu limite L = 1.

EXEMPLO

Verifique se a sequência $\{a_n\} = 2.n$ é ou não convergente.

Calculando o limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} 2.n = 2.\infty = \infty$$

Assim, a sequência é divergente.

O mesmo raciocínio vale para as séries infinitas, isto é, se uma série infinita possuir um limite diferente de infinito será uma série convergente, senão será divergente.

Contudo, não é trivial avaliar a convergência de uma série infinita. Existem muitos resultados e teoremas relacionados com o assunto, mas que extrapolam o objetivo desse capítulo, que está focado em um tipo especial de série infinita, a série de Fourier.

Contudo, é possível avaliar, não provar matematicamente, o comportamento apenas observando o comportamento da sequência.

EXEMPLO

Retomando a sequência harmônica, provamos que existe um limite e portanto a sequência é convergente. Contudo, se tivermos a seguinte série infinita:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

A série harmônica também será convergente?

Note que estamos somando infinitamente termos que convergem para zero, mas o valor da soma não para de crescer, por menores que fiquem as parcelas, o que significa que o valor de S converge para infinito, ou seja, a série harmônica é divergente, apesar da sequência ser convergente.

Outra série muito conhecida é a destacada no exemplo 5.

EXEMPLO

Avaliar se a série abaixo é convergente ou não:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Os termos da série são parcelas da conhecida expansão em série de Taylor, e em particular a série retratada resulta no número de Euler. Assim, como a soma será diferente de infinito, a série é convergente.

Não vamos nos estender sobre a convergência de séries infinitas, mas uma questão deve ser esclarecida neste momento. Se a série de Fourier é formada por uma sequência infinita de funções periódicas, ela será convergente?

Sim, esse resultado já foi provado de diversas formas e por diversos matemáticos ao longo do tempo, como você poderá conferir na indicação do box conexão.

CONEXÃO

Para verificar a comprovação da convergência da série de Fourier, você pode acessar o artigo publicado pela Revista Matemática Universitária em 1990:

http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n11/n11_Artigo02.pdf

Do discutido nesta seção, o importante é você ter em mente que uma série infinita nada mais é do que a soma de infinitas parcelas resultantes de um termo geral, que forma a série, e que essa soma pode resultar em um valor limitante, sendo a série convergente, como é o caso da série de Fourier.

Contudo, para ficar mais claro esse comportamento convergente, vamos agora pensar um pouco sobre as parcelas que formam a série de Fourier, que dependem de funções periódicas.

5.2 Séries periódicas e séries trigonométricas.

Os resultados obtidos por Fourier estão associados a funções periódicas o que significa que todo o processo matemático das séries envolve uma combinação de funções reais que possam descrever ciclos e períodos.

Nesse sentido, pense o seguinte. Quais funções você conhece que podem representar esses períodos cíclicos? Quais funções estudadas no passado são capazes de ilustrar um comportamento periódico?

Bem, uma forma não muito complexa de avaliar essa questão é lembrar a representação gráfica das principais funções estudadas até aqui e questionar se tal representação pode reproduzir um comportamento cíclico ou periódico. Você se lembra de algum caso? Se você pensou nas funções trigonométricas, acertou.

As funções trigonométricas são uma família de funções que possuem um comportamento cíclico, em especial as funções seno e cosseno. Veja nas figuras 5.1 e 5.2 uma representação gráfica dessas funções.
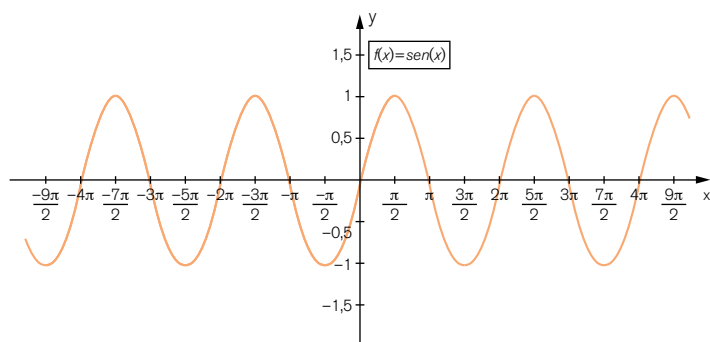
Figura 5.1 – Gráfico da função f(x)=sen(x).
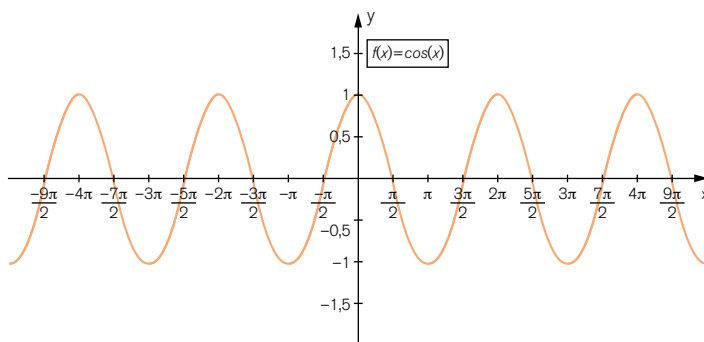
Figura 5.2 – Gráfico da função f(x)=cos(x).

É notável que as duas funções, seno e cosseno, possuem um comportamento periódico e podem, sem sombra de dúvidas, representar os resultados obtidos por Fourier. Note também que tanto a função seno quanto a função cosseno possuem um período, igual a 2π. O período representa o intervalo em x onde ocorre o ciclo das funções, que irá se repetir infinitamente, sempre no mesmo período. Nos dois casos, o seno e o cosseno repetem a ondulação, o ciclo, em intervalos de comprimento igual a 2π. A única diferença entre as duas é um deslocamento de $\frac{\neq}{2}$ no início do ciclo.

Partindo das funções seno e cosseno, podemos agora pensar o seguinte: qualquer parametrização dessas funções gera um comportamento periódico constante? O que você acha, sim ou não? Infelizmente a resposta é não. Nem toda parametrização das funções gera um comportamento periódico constante, mas muitos possibilidades atendem ao critério.

Vamos explanar alguns exemplos para avaliar alguns casos, o que com certeza facilitará seu entendimento da forma final da série de Fourier.

Vejamos inicialmente o comportamento da função f(x)=sen(2x), figura 5.3, e da função f(x)=cos (3x), figura 5.4.

Observando as figuras 5.3 e 5.4 notamos que ambas possuem um comportamento periódico constante, cada uma com um período específico. Assim, a mudança no argumento da função, de forma linear, mudou apenas o valor do período, mas não sua constância ao longo do domínio.
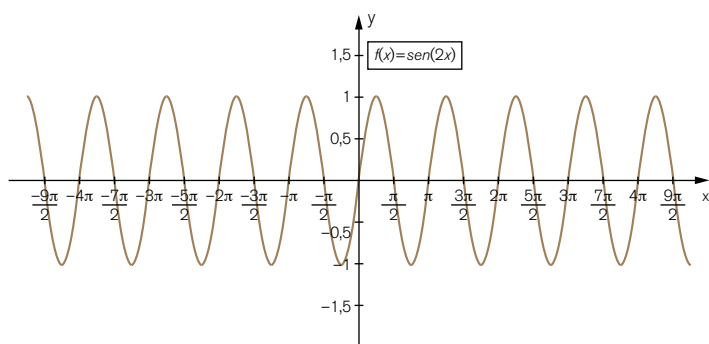
Figura 5.3 – Gráfico da função f(x)=sen(2x)t.
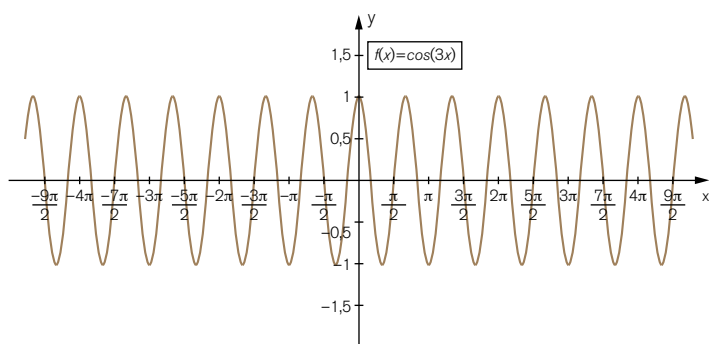
Figura 5.4 – Gráfico da função f(x)=cos(3x).

Vejamos agora o que acontecerá se colocarmos um coeficiente multiplicativo nas funções, por exemplo, funções do tipo f(x)=3.sen(2x), figura 5, e f(x)=4.cos(3x), figura 6.

Observando as figuras 5 e 6 é perceptível que o comportamento é mantido, periodicidade constante, mas conforme mudamos o coeficiente, muda também o valor do período, formando ciclos mais abertos ou mais fechados, períodos mais longos ou mais curtos.

Essa propriedade dos senos e cossenos foi fundamental para que Fourier pudesse concretizar os seus resultados obtendo uma série capaz de representar qualquer tipo de função através da combinação de períodos das séries trigonométricas.

Contudo, nem sempre modificações nos senos e cossenos serão bem sucedidas.
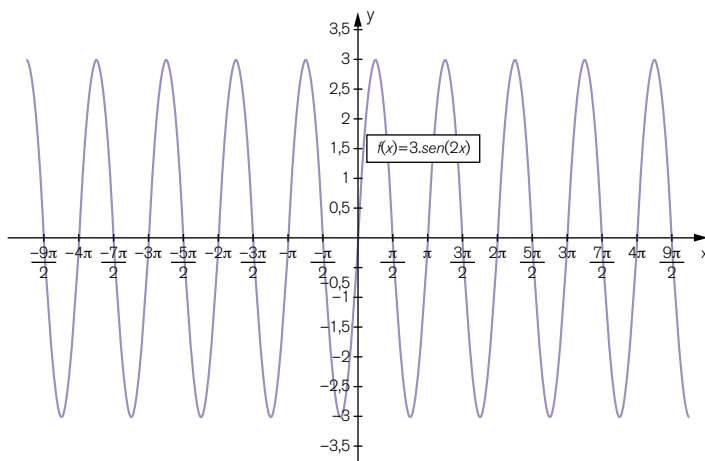
Figura 5.5 – Gráfico da função f(x)=3.sen(2x).
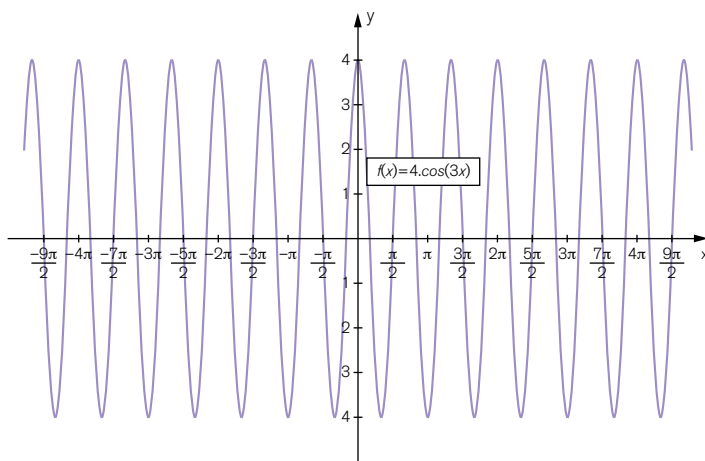
Figura 5.6 – Gráfico da função f(x)=4.cos(3x).

Para exemplificar situações que fogem do esperado, vejamos as funções $f(x)=sen(x^2)$, figura 5.7, e a função $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, figura 8.
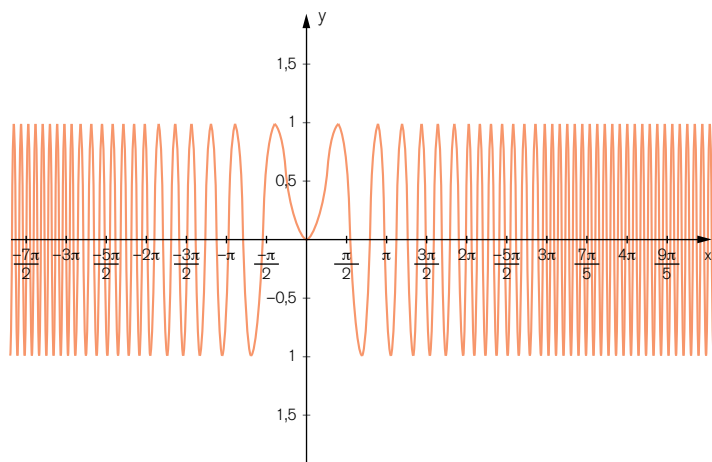
Figura 5.7 – Gráfico da função f(x)=sen(x2).
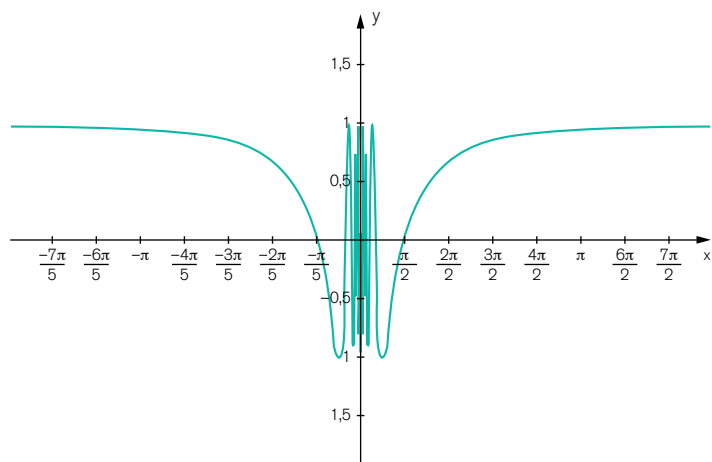
Figura 5.8 – Gráfico da função $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Desta forma, apenas argumentos ou coeficientes lineares produzem configurações com períodos constantes. Agora, o que ocorre se fizermos uma combinação de senos e cossenos? Vejamos.

Vamos começar por uma combinação aditiva, senos somados a cossenos. Observe na figura 9 a função f(x)=sen(x)+cos (x) .

É possível observar que o comportamento continuou cíclico, mas com uma diferença, o período é uma intermedia entre os anteriores.
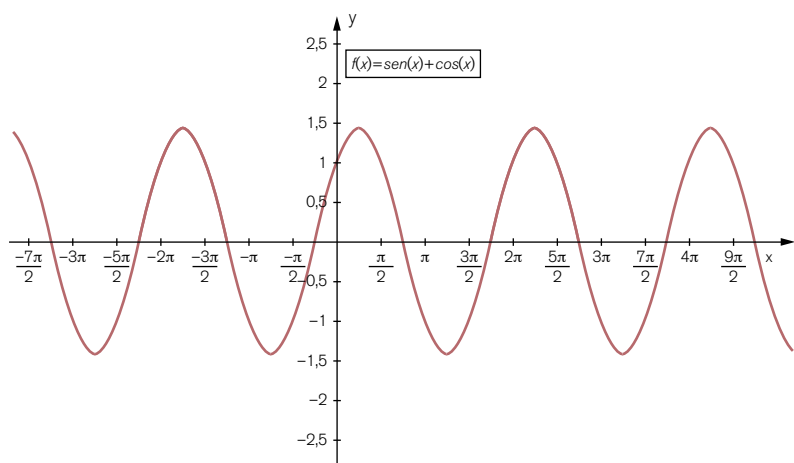
Figura 5.9 – Gráfico da função f(x)=sen(x)+cos (x)

Vejamos ainda um gráfico com as funções seno, cosseno e a soma das duas de maneira simultânea (figura 5.10). Note que três possuem diferentes períodos e ainda que a função da soma representada pela linha cheia corta o eixo horizontal em pontos onde o valor do seno é igual ao valor do cosseno, mas com sinais contrários.

Da mesma forma, se tomarmos as funções seno e cosseno com coeficientes lineares e argumentos lineares, as somas também serão cíclicas, como pode ser confirmado nas figuras 5.11, 5.12 e 5.13.
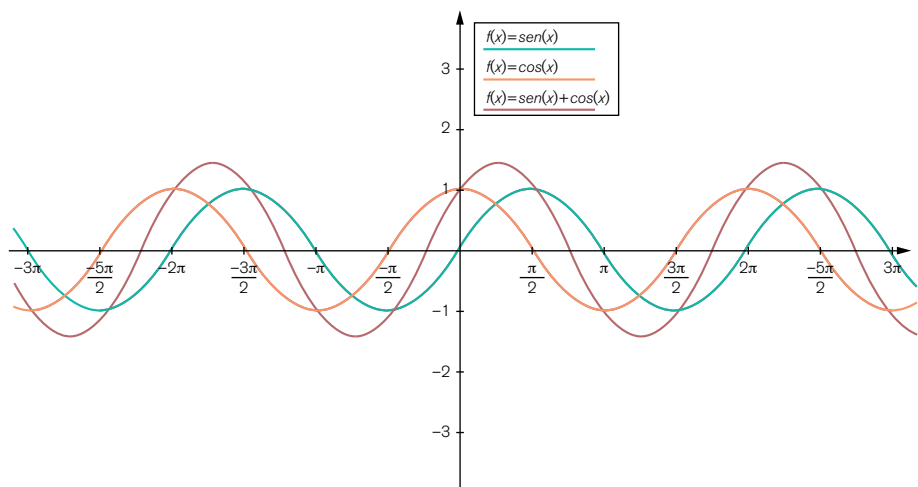
Figura 5.10 – Gráfico das funções seno, cosseno e soma de seno e cosseno.
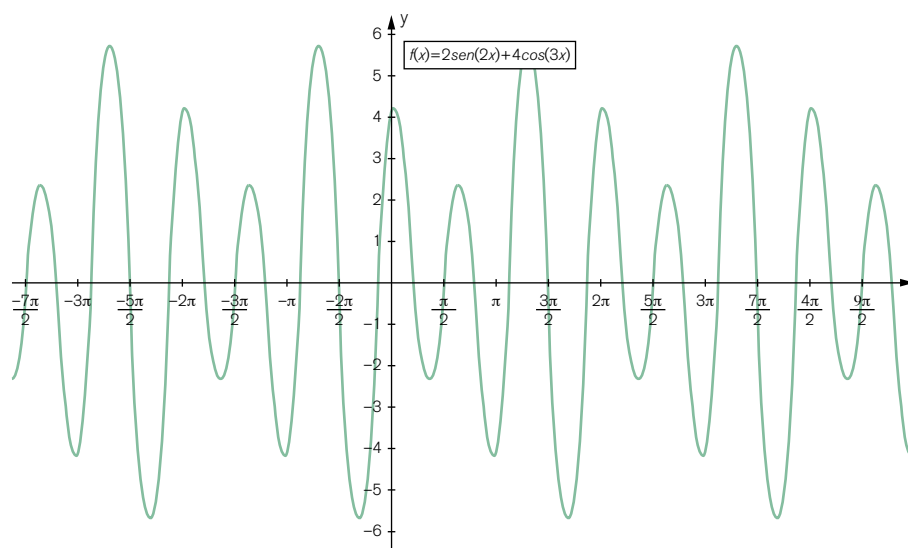
Figura 5.11 – Gráfico da função f(x)=2.sen(3x)+3.cos(4x)
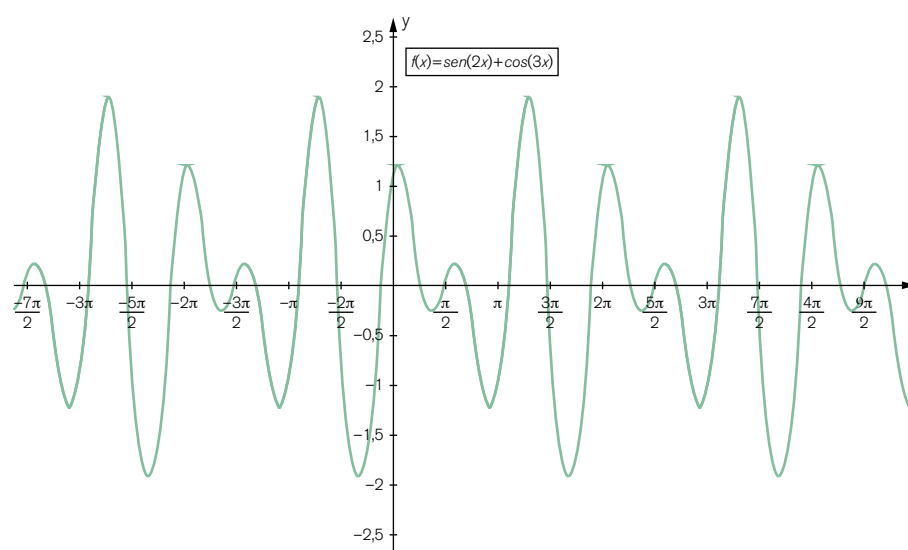
Figura 5,12 – Gráfico da função f(x)=sen(2x)+cos(3x)
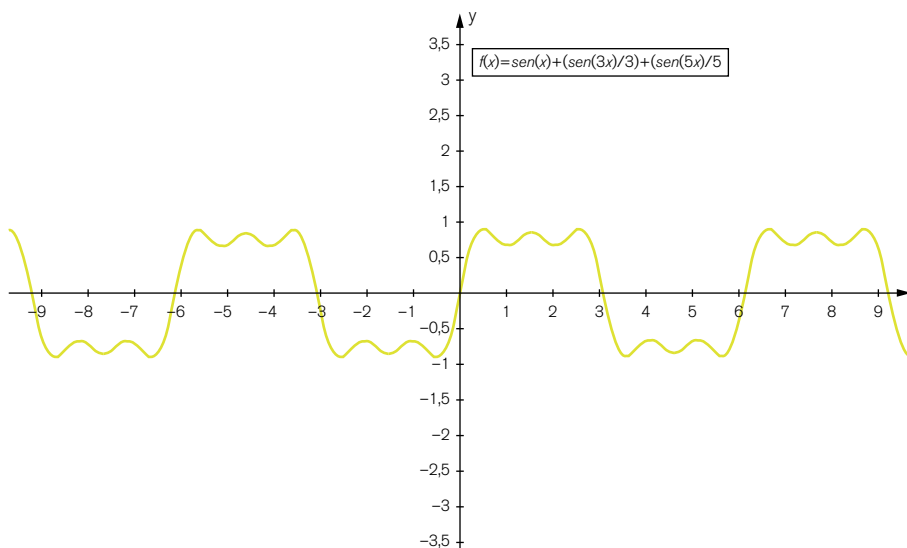
Figura 5.13 – Gráfico da função $f(x) = sen(x) + \frac{1}{3}sen(3x) + \frac{1}{5}sen(5x)$.

Você pode explorar muitas formas diferenciadas de curvas periódicas alterando os coeficientes e os argumentos em uma sequência de somas de senos e cossenos. Experimente utilizar o software livre Graph, o mesmo que utilizamos na confecção dos gráficos deste capítulo.

Se somarmos os conceitos de séries infinitas com a visualização de que a soma de senos e cossenos pode gerar uma função periódica, não é difícil imaginar qual a forma geral da série de Fourier, não é?

Relembrando, vimos que a resultado obtido por Fourier sugeria que era possível representar uma função qualquer por uma série infinita de funções periódicas, trigonométricas. Podemos interpretar esse resultado da seguinte forma:

f(x)=a_0 sen(0.x)+a_1 sen(1x)+a_2 sen(2x)+⋯+b_1 cos(1x)+b_2 cos(2x)+⋯

Ou de forma mais resumida:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i sen(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i cos(ix)$$

Já começamos a dar uma forma para a série de Fourier, uma soma infinita de funções periódicas formadas por senos e cossenos.

O grande problema é, dada uma situação qualquer, encontrar os coeficientes a_i e b_i.

Para entender o processo de cálculo dos coeficientes, vamos explorar inicialmente dois conceitos: as séries pares e ímpares e o valor médio de uma função.

5.3 Séries pares e ímpares.

Antes de abordar o conceito de série par e ímpar, vejamos tais conceitos considerando funções matemáticas. Funções pares e funções ímpares estão associadas a simetria do domínio e também ao comportamento simétrico, ou não da função. Por exemplo, você se lembra dos gráficos das funções de primeiro e de segundo graus, não é?

Bem, se você considerar uma reta do tipo f(x)=ax, o resultado é uma função simétrica em relação a origem, mas não é simétrica em relação ao eixo horizontal, mas uma parábola do tipo f(x)=ax2, será simétrica em relação ao eixo horizontal, mas não em relação a origem.

Assim, se tomarmos valores do domínio, simétricos em relação ao eixo vertical, por exemplo -2 e 2, vamos observar que para a reta, o valor da função será diferente nos dois pontos, mas para a parábola não, como pode ser observado nas figuras 5.14 e 5.15.
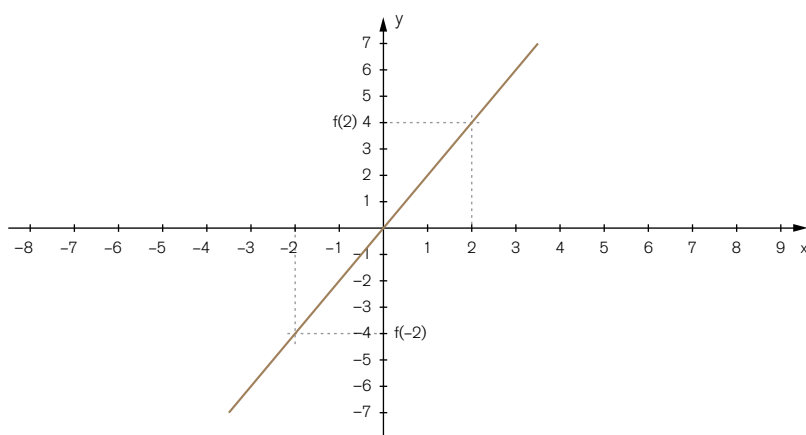
Figura 5.14 – Gráfico da função linear – função ímpar.
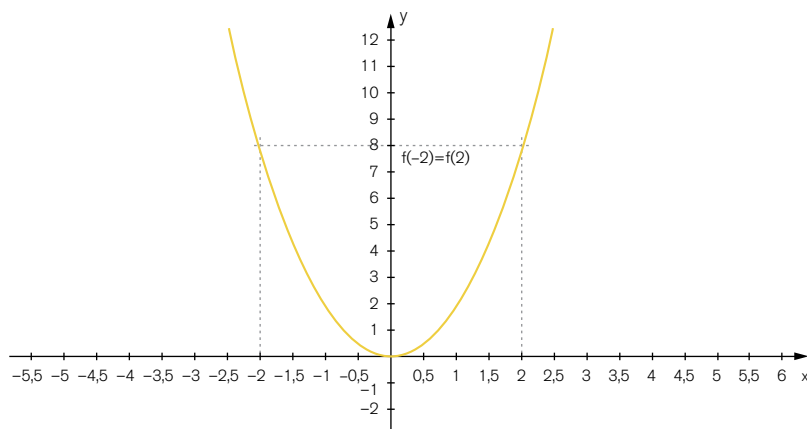
Figura 5.15 – Gráfico da função quadrática – função par.

O fato de a função acompanhar a simetria do domínio a caracteriza como uma função par, ou seja:

Definição de Função Par: Seja uma função f(x) cujo domínio seja um conjunto simétrico. Assim, f(x) é uma função par se, e somente se, f(− x) = f(x), para todo x pertencente ao domínio.

Apesar da função linear não ser simétrica em relação ao eixo horizontal, o é em relação a origem o que significa que o valor da função para −x e x são iguais, mas com sinais contrários, o que a caracteriza como uma função ímpar. Assim:

Definição de Função Ímpar: Seja uma função f(x) cujo domínio seja um conjunto simétrico. Assim, f(x) é uma função ímpar se, e somente se, f(− x) = − f (x), para todo x pertencente ao domínio.

Voltando às figuras 5.1 e 5.2, você seria capaz de definir qual a classificação das funções seno e cosseno?

Note que a função seno é uma função ímpar enquanto que a função cosseno é uma função par. Agora, o que você pode dizer dessas funções se elevarmos ambas ao quadrado?

Bem, para responder a essa questão podemos recorrer a uma propriedade das funções pares e ímpares que diz:

Propriedade 1: se f(x) for par, então f(x).f(x) será par.

Propriedade 2: se f(x) for ímpar, então f(x).f(x) será par.

Assim, tanto a função $f(x) = sen^2(x)$ quanto a função $f(x) = cos^2(x)$ serão pares.

Você deve estar se perguntando, qual a relevância em discutir funções pares e ímpares para o estudo das séries de Fourier?

Bem, além dos aspectos relacionados com a simetria da função, temos outros dois resultados, que apesar de serem bem intuitivos, são de grande ajuda para se trabalhar com a série de Fourier. Vejamos.

Resultado 1. Considere uma função f(x) par variando no intervalo de −x a x, conforme indicado na figura 16. Considere ainda a área sob f(x) no intervalo de −x a 0 e a área sob f(x) no intervalo 0 a x, destacadas na figura 16. Note que, pela simetria, as áreas são iguais e com isso podemos afirmar que se uma função f(x) for par, vale a seguinte relação:

$$\int_{-x}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{x} f(x)dx \Rightarrow \int_{-x}^{x} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{x} f(x)dx$$
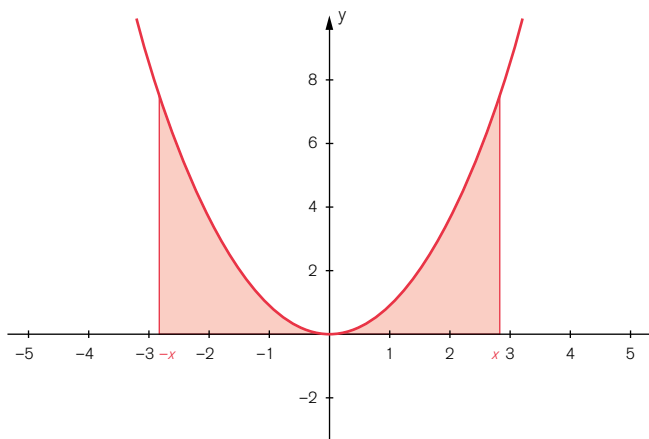
Figura 5.16 – Áreas simétricas em uma função par.

Resultado 2. Considere uma função f(x) ímpar variando no intervalo de −x a x, conforme indicado na figura 5.17. Considere ainda a área sob f(x) no intervalo de −x a 0 e a área sob f(x) no intervalo 0 a x, destacadas na figura 5.17. Note que, pela simetria, as áreas são iguais, mas com sinal contrário e com isso podemos afirmar que se uma função f(x) for ímpar, vale a seguinte relação:

$$\int_{-x}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{x} f(x)dx \Rightarrow \int_{-x}^{x} f(x)dx = 0$$
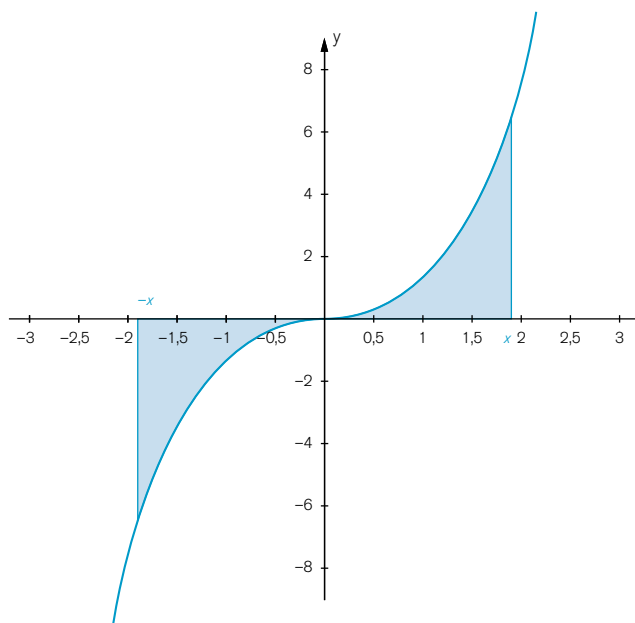
Figura 5.17 – Áreas opostas em uma função ímpar.

Note que tais resultados são importantes, pois a série de Fourier é formada por senos (funções ímpares) e cossenos (funções pares), mas que também será formada por funções do tipo seno ao quadrado e cosseno ao quadrado, que são funções pares e tais resultados abreviará a manipulação das integrais necessárias para a caracterização das séries de Fourier.

Além das funções, e consequentemente séries pares e ímpares, temos ainda outro conceito a apresentar antes de começarmos nosso trabalho de dedução dos coeficientes da série de Fourier. Vamos relembrar o conceito de valor médio de uma função. Supondo uma função f(x) contínua em um intervalo (0,x), sabemos que a integral definida de f(x) no intervalo equivale a área S sob a curva, ou seja:

$$S = \int_0^x f(x)\,dx$$

Ainda, conforme SALAS et al (2005), sabemos que sempre é possível reproduzir a área S através da área de um retângulo de base x com altura M, onde M é chamada de média da função f(x). Veja a representação desse resultado na figura 5.18.
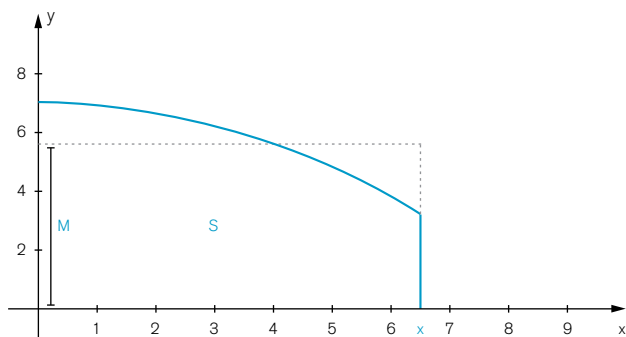
Figura 5.18 – Área S sob a a curva F(x), de 0 a x e a área equivalente de um retângulo de altura M.

O valor médio de uma função também pode ser representado com o uso dos sinais de maior e menor, da forma <f(x)>.

CONEXÃO

Para maiores detalhes sobre o valor médio de uma função você pode consultar a seguinte referência:

http://www.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/sma301/Aulas/Aula18.pdf

Nessas condições, temos que a altura M, para que as áreas sejam equivalentes, deve ser igual a:

$$M = \frac{\int_0^x f(x)}{x}$$

Agora, relembrado esse conceito, o que ocorre com o valor médio M se *f(x)* for uma função periódica como o seno e o cosseno?

Observando as figuras 1 e 2, de 0 a 2π, notamos que em ambas a área S será uma soma de áreas contendo partes positivas e partes negativas, e devido à simetria das curvas, a área positiva será igual a área negativa, o que faz com que M seja igual a zero.

O mesmo comportamento ocorre se tomarmos funções que combinam o produto de senos e cossenos, como podemos observar nas figuras 5.19, 5.20 e 5.21.
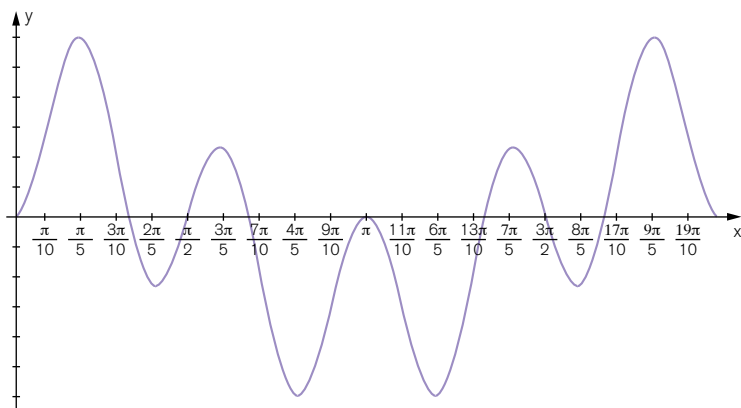
Figura 5.19 – Gráfico da função f(x)=sen(2x).sen(3x).
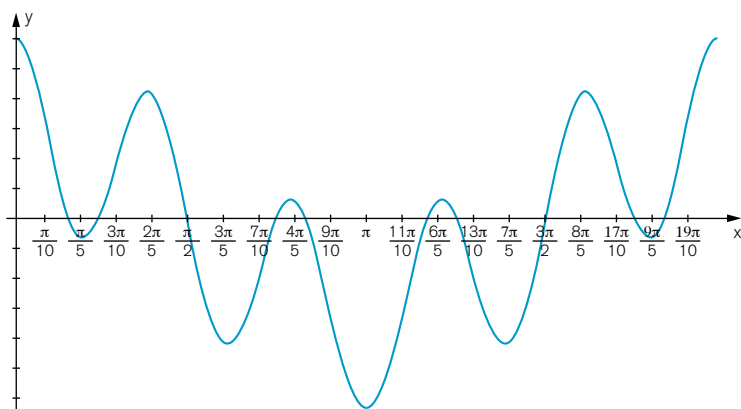
Figura 5.20 – Gráfico da função f(x)=cos(2x).cos(3x).
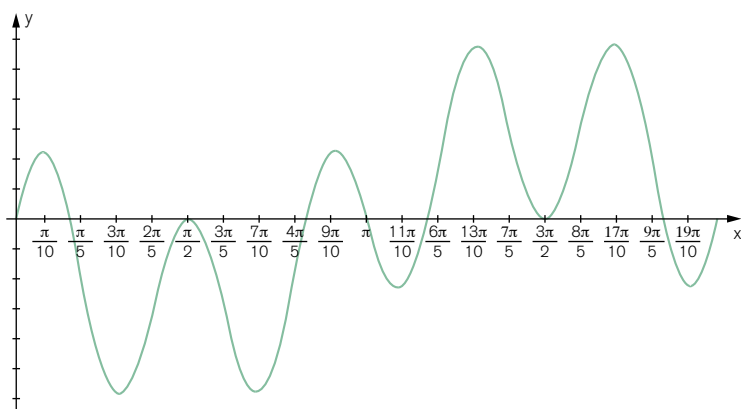
Figura 5.21 – Gráfico da função f(x)=sen(2x).cos(3x).

E sobre funções do tipo f(x)=sen2(x) e f(x)=cos2(x)? O que ocorrerá com a área entre 0 e 2π? Observe as figuras 5.22 e 5.23.
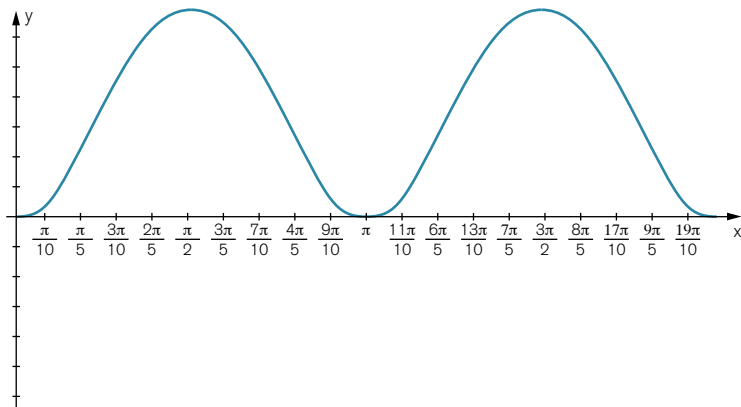
Figura 5.22 – Gráfico da função $f(x)=sen^2(x)$.
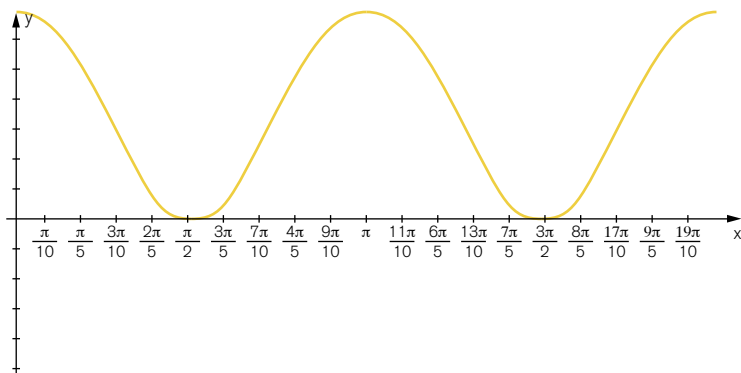
Figura 5.23 – Gráfico da função $f(x)=cos^2(x)$.

Note que neste caso a área S ainda será uma soma de áreas, mas todas positivas. Assim, temos que:

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx}{2\pi}$$

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} cos^2(x)dx}{2\pi}$$

Vamos calcular a integral definida do seno ao quadrado inicialmente. Temos:

$$\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{2.sen^2(x)dx}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{[sen^2(x)+sen^2(x)]\ dx}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[sen^2(x)+sen^2(x)]+[cos^2(x)-cos^2(x)]\ dx}{2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[sen^2(x)+cos^2(x)]+[sen^2(x)-cos^2(x)]\ dx}{2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[sen^2(x)+cos^2(x)]\ dx}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{[sen^2(x)-cos^2(x)]\ dx}{2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[sen^2(x)+cos^2(x)]\ dx}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{[cos^2(x)-sen^2(x)]\ dx}{2}$$

Note que chegamos a duas relações bem conhecidas. A primeira relação entre senos e cossenos aponta que $sen^2(x)+cos^2(x)=1$ enquanto que a segunda relação de interesse aponta que $\cos(a)=cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-sen^2\left(\frac{a}{2}\right)$, o que quer dizer que $cos^2(x)-sen^2(x)=\cos(2x)$

Substituindo nas integrais anteriores, temos então:

$$\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)dx}{2}$$

Utilizando uma substituição simples, u=2x, verificamos então que:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\text{sen}(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi}{2}-\frac{\text{sen}(4\pi)}{4}\right]-\left[\frac{0}{2}-\frac{\text{sen}(0)}{4}\right]=\pi$$

Verifique que o mesmo ocorrerá com a integral do cosseno ao quadrado. Assim, em resumo, temos os seguintes resultados:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi$$

Substituindo no cálculo do valor médio M, temos:

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)dx}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{\int_0^{2\pi} \cos^2(x)dx}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Considerando todos os resultados obtidos anteriormente, temos os seguintes valores para a média M (para cada um dos períodos de tamanho 2π):

FUNÇÃO	VALOR MÉDIO M
f(x)=a.sen(ix)	0
f(x)=a.cos(ix)	0
f(x)=a.sen(ix).b.sen(jx)	0
f(x)=a.cos(ix).b.cos(jx)	0
f(x)=a.sen(ix).b.cos(jx)	0
f(x)=a.sen^2(ix)	1/2
f(x)=a.cos^2(ix)	1/2

Tabela 1 – Valores médios para as funções seno e cosseno.

Nos tópicos discutidos até aqui, reunimos diversos resultados sobre a convergência da série de Fourier, sobre propriedades das séries pares e ímpares e também sobre as integrais definidas partindo do valor médio da função. Com todos esses resultados, estamos prontos para iniciar a obtenção dos coeficientes da série de Fourier.

Vimos anteriormente que a série de Fourier é na verdade uma expansão erando uma soma de senos e cossenos da forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + \cdots + b_1 cos(x) + b_2 cos(2x) + \cdots$$

Ou de forma mais resumida:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i sen(ix) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i cos(ix)$$

Uma forma simples de procurar os valores dos coeficientes a_i associados aos senos os valores b_i associados ao cosseno é multiplicar toda a série pela função correspondente ao coeficiente que se deseja calcular.

Ilustrando o processo, vamos determinar o valor do coeficiente a_1 que está associado a função sen(x). Assim, multiplicamos a série de Fourier por sen(x), obtendo o seguinte resultado:

$$f(x).sen(x) = a_0 sen(x) + a_1 sen^2(x) + a_2 sen(x) sen(2x) + \cdots$$
$$\cdots + b_1 sen(x) cos(x) + b_2 sen(x) cos(2x) + \cdots$$

As funções resultantes lembram algum resultado obtido anteriormente? Se você pensou nos resultados colocados na tabela 1, acertou. Note que temos as mesmas funções colocadas na tabela, então se tomarmos os valores médios das mesmas, já sabemos quais os resultados esperados. Por uma questão de conveniência, denotaremos o valor médio com a notação <>. Assim:

$$\langle f(x).sen(x) \rangle = < a_0 sen(x) > + \langle a_1 sen^2(x) \rangle + < a_2 sen(x) sen(2x) > + \cdots$$
$$\cdots + < b_1 sen(x) cos(x) > + < b_2 sen(x) cos(2x) > + \cdots$$

Observando a tabela 5.1, vemos que os valores médios para os funções do tipo sen(x), sen(x)sen(ix) serão iguais a zero, bem como para as funções do tipo sen(x).cos(ix). Ainda, pela tabela 5.1 podemos observar que a média da função sen2(x) será igual a meio.

Substituindo, temos:

$$\langle f(x).sen(x)\rangle = \frac{1}{2}a_1 \Rightarrow a_1 = 2.\langle f(x).sen(x)\rangle$$

Como os resultados da tabela 5.1 valem para o seno e também para o cosseno, podemos generalizar o resultado anterior da seguinte forma:

$$a_i = 2.\langle f(x).sen(i.x)\rangle$$

$$b_i = 2.\langle f(x).cos(i.x)\rangle$$

É importante notar que os resultados anteriores não estão relacionados com o parâmetro a0. Neste caso, tomando a média da série, sem a multiplicação de qualquer função pela série, todos os termos serão mantidos como estão, senos e cossenos, e em todos os casos o valor médio será igual a zero. Assim $a_0 = \langle f(x)\rangle$

Resumidamente, temos os seguintes coeficientes:

$$a_0 = \langle f(x)\rangle$$

$$a_i = 2.\langle f(x).sen(i.x)\rangle$$

$$b_i = 2.\langle f(x).cos(i.x)\rangle$$

Basta termos a função f(x) de interesse e determinar os valores médios para cada um dos coeficientes. Desde já é bom esclarecer que a série de Fourier é infinita e portanto não temos condições de calcular todos os coeficientes, mas apenas parte deles. Cabe ao usuário definir quantos coeficientes serão determinados, sempre lembrando que quanto maior o número de coeficientes mais próxima a série ficará da função objetivo.

EXEMPLO

Vejamos como trabalhar com a série de Fourier em uma caso clássico, muito frequente em circuitos de chaveamento digitais, a onda quadrada. Ela tem esse nome por estar associada ao conceito de dígitos binários, representando a ausência ou presença de um determinado sinal, por exemplo. Desta forma, é uma função não contínua que apresenta apenas dois resultados. A função abaixo é um exemplo de onda quadrada, que pode ser representada pela figura 5.24.

$$f(x)=\begin{cases}1, a\pi \le x < (a+1)\pi \\ 0,(a+1)\pi \le x \le (a+2)\pi\end{cases}$$

Para a=0, 2, 4, 6, ...
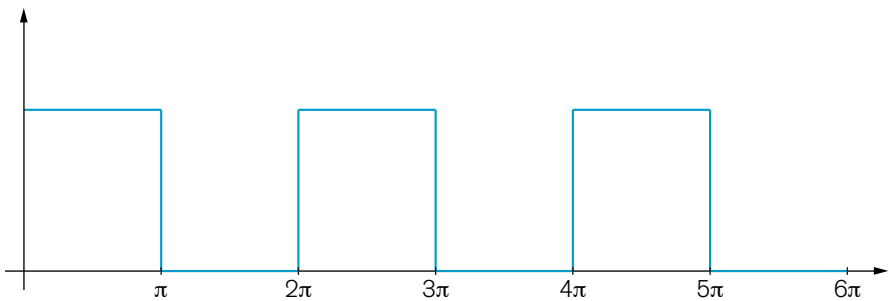
Figura 5.24 – Gráfico da onda quadrada do exemplo 1.

Resolvendo o exemplo 1, temos que considerar que a função f(x) possui apenas dois valores, 0 ou 1, em função do domínio. Faremos os cálculos para o primeiro período apenas, de 0 a 2π, pois para os demais os resultados serão os mesmos.

Como a_0 é simplesmente a média da função f(x), e ela assume apenas dois valores, 0 e 1, é imediato deduzir que a_0 = 0,5.

Observando os valores de b_i, temos que todos estão associados a cossenos, que no intervalo de 0 a 2π terão valor médio igual a zero, como visto anteriormente. Assim todos os coeficientes b_i são eliminados da série.

Para calcular o valor de a_1, lembramos que $a_1 = 2.\langle f(x).sen(x)\rangle$. Para f(x)=0 temos que <f(x).sen(x)> será igual a zero. Para f(x)=1, temos que a média será igual a:

$$M=\frac{\int_0^{\pi}1.\text{sen}(x)dx}{\pi}=\frac{-\cos(x)_0^{\pi}}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

Assim, temos para f(x)=0 média zero e para f(x)=1 média $2/\pi$, então é natural que a média final de f(x).sen(x) seja igual a $1/\pi$.

Então, temos:

$$a_1 = 2.\langle f(x).sen(x)\rangle 2.\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Vamos agora calcular o valor de a_2, lembramos que $a_2 = 2.\langle f(x).sen(2x)\rangle$. Observando novamente a figura 3, colocada no início do capítulo, é notável observar que no intervalo de 0 a π, onde f(x)=1, a função sen(2x) tem um comportamento ímpar, o que nos leva a concluir que o valor médio será igual a zero. Como para f(x)=0 o valor médio também será zero, concluímos que a_2 = 2.0 = 0.

Ainda, se fizermos o gráfico das função sen(4x) ou sen(6x) esse comportamento será mantido. Assim, para todo a_i, com i par, o coeficiente será igual a zero.

Resta observar o que ocorrerá com o parâmetro a_3 e os demais parâmetros com índice ímpar. Vejamos.

Para calcular o valor de a_3, lembramos que $a_3 = 2.\langle f(x).sen(3x)\rangle$. Para f(x)=0 temos que <f(x).sen(3x)> será igual a zero. Para f(x)=1, temos que a média será igual a:

$$M = \frac{\int_0^{\pi} 1.sen(3x)dx}{\pi} = \frac{-\frac{1}{3}cos(3x)_0^{\pi}}{\pi} = \frac{2}{3\pi}$$

Assim, temos para f(x)=0 média zero e para f(x)=1 média igual a $\frac{2}{3\pi}$, então é natural que a média final de f(x).sen(3x) seja igual a $\frac{1}{3\pi}$.

Então temos:

$$a_3 = 2.\langle f(x).sen(3x)\rangle 2.\frac{1}{3\pi} = \frac{2}{3\pi}$$

Você consegue verificar uma lei de formação para os índices ímpares dos coeficientes? Não? Então façamos o cálculo do parâmetro a_5.

Para calcular o valor de a_5, lembramos que $a_5 = 2.\langle f(x).sen(5x)\rangle$. Para f(x)=0 temos que <f(x).sen(3x)> será igual a zero. Para f(x)=1, temos que a média será igual a:

$$M = \frac{\int_0^{\pi} 1.sen(5x)dx}{\pi} = \frac{-\frac{1}{5}cos(5x)_0^{\pi}}{\pi} = \frac{2}{5\pi}$$

Assim, temos para f(x)=0 média zero e para f(x)=1 média igual a $\frac{2}{3\neq}$, então é natural que a média final de f(x).sen(3x) seja igual a $\frac{1}{3\neq}$.

Então temos:

$$a_3 = 2.\langle f(x).\text{sen}(3x)\rangle 2.\frac{1}{5\pi} = \frac{2}{5\pi}$$

E agora, será que podemos generalizar? Sim, certamente. É possível observar que para todos os parâmetros ímpares, vale a seguinte regra:

$$a_i = \frac{2}{i\pi}$$

Assim, finalmente temos a série de Fourier para o exemplo 1, dada por:

$$f(x) = 0,5 + \frac{2}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{3\pi}\text{sen}(3x) + \frac{2}{5\pi}\text{sen}(5x) + \frac{2}{7\pi}\text{sen}(7x) + \cdots$$

Como já discutimos anteriormente, podemos representar, de forma finita, a série definindo a quantidade de termos a serem utilizados, mas com o cuidado de lembrar que quanto maior o número de termos mais próxima da função original. É fácil verificar essa propriedade pelas figuras 5.25, 5.26 e 5.27.
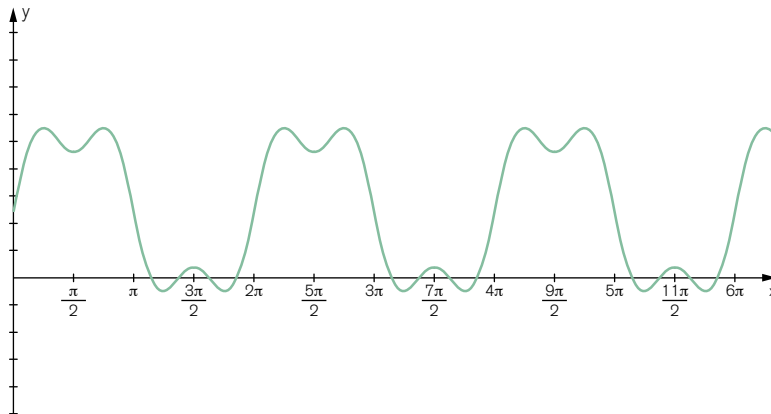
Figura 5.25 – Gráfico da série de Fourier do exemplo 1 com 3 termos.
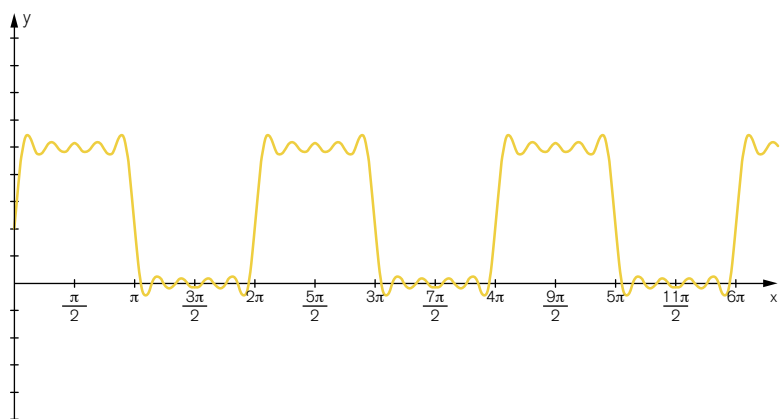
Figura 5.26 – Gráfico da série de Fourier do exemplo 1 com 6 termos.
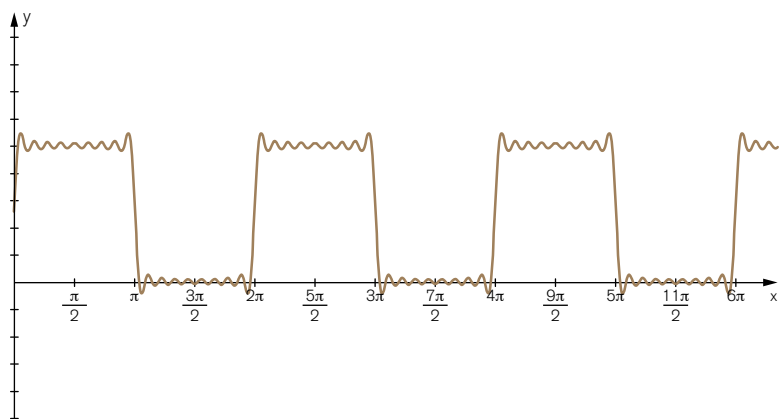
Figura 5.27 – Gráfico da série de Fourier do exemplo 1 com 10 termos.

É nítido que na figura 5.27, com a série contendo 10 termos, o resultado está bem mais próximo da figura 5.24 que nos outros dois casos. É claro também que se colocarmos mais termos, a aproximação será cada vez melhor.

EXEMPLO

Expandir a função $f(x)=2x^2$ em termos da série de Fourier, para $-\pi \leq x \leq \pi$.

Calculando o parâmetro a_0:

$$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 dx}{2\pi} = \frac{\left.\frac{2x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi}}{2\pi} = \frac{\frac{4\pi^3}{3}}{2\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Calculando o parâmetro a_1:

$$a_1 = 2 \cdot \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \operatorname{sen}(x) dx}{2\pi}$$

Aplicando seus conhecimentos de cálculo integral, você pode verificar que a integral do numerador, sem os limites, será igual a:

$$\int 2x^2 \operatorname{sen}(x) dx = -2x^2 \cdot \cos(x) + 4x \cdot \operatorname{sen}(x) + 4 \cdot \cos(x)$$

Ao avaliarmos esse resultado no intervalo da função, devemos nos lembrar das propriedades das funções pares e ímpares, discutidas anteriormente. Como a função seno é ímpar, é natural associar que a área será igual à zero. Assim, podemos efetuar o cálculo considerando apenas os termos relacionados ao cosseno, da forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \operatorname{sen}(x) dx = \left[-2x^2 \cdot \cos(x) + 4 \cdot \cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -2\pi^2 \cos(\pi) + 4\cos(\pi) + 2\pi^2 \cos(\pi) - 4\cos(\pi) =$$

$$= 2\pi^2 - 4 - 2\pi^2 + 4 = 0$$

Então:

$$a_1 = 2 \cdot \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \operatorname{sen}(x) dx}{2\pi} = \frac{0}{2\pi} = 0$$

Devido às propriedades do seno e cosseno em termos de funções pares e ímpares, o mesmo resultado ocorrerá com todos os termos sen(kx) da série de Fourier. Desta forma, temos que todos os a_i serão iguais a zero. Neste caso dizemos que a série de Fourier será uma série de cossenos apenas.

Calculando agora o parâmetro b_1, temos:

$$b_1 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(x)dx}{2\pi}$$

Aplicando seus conhecimentos de cálculo integral, você pode verificar que a integral do numerador, sem os limites, será igual a:

$$\int 2x^2 \cos(x)dx = 2x^2 \cdot \text{sen}(x) + 4x \cdot \cos(x) - 4 \cdot \text{sen}(x)$$

Novamente, devido às características da função seno, temos que todos os termos dependente de sen(x) serão iguais a zero, reduzindo o cálculo da integral apenas em termos do cosseno. Ainda, pelo fato do cosseno ser uma função ímpar, podemos nos limitar a calcular a integral de zero a π, e depois multiplicar o resultado final por 2.

Assim, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} 4x \cdot \cos(x)dx =$$

$$= 2 \cdot \left[4\pi \cdot \cos(\pi) - 4.0 \cdot \cos(0)\right] = 2 \cdot [-4\pi - 0] = -8\pi$$

Então, temos:

$$b_1 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(x)dx}{2\pi} = 2 \cdot \frac{-8\pi}{2\pi} = -8$$

Calculando agora o parâmetro b_2, temos:

$$b_2 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(2x)dx}{2\pi}$$

Aplicando seus conhecimentos de cálculo integral, você pode verificar que a integral do numerador, sem os limites, será igual a:

$$\int 2x^2 \cos(2x)dx = x^2 \cdot \text{sen}(2x) + x \cdot \cos(2x) - \frac{\text{sen}(2x)}{2}$$

De maneira análoga ao caso anterior, a integral será reduzida a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(2x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(2x)dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\pi \cdot \cos(2\pi) - 0 \cdot \cos(2.0)\right] = 2 \cdot [\pi - 0] = 2\pi$$

Então, temos:

$$b_2 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(x)dx}{2\pi} = 2 \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = 2$$

Comparando os dois parâmetros calculados, não fica evidente uma lei de formação. Assim, vamos continuar calculando os parâmetros.

Calculando agora o parâmetro b_3, temos:

$$b_3 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(3x)dx}{2\pi}$$

Aplicando seus conhecimentos de cálculo integral, você pode verificar que a integral do numerador, sem os limites, será igual a:

$$\int 2x^2 \cos(3x)dx = \frac{2x^2 \cdot \text{sen}(3x)}{3} + \frac{4x \cdot \cos(3x)}{9} - \frac{4 \cdot \text{sen}(3x)}{27}$$

De maneira análoga ao caso anterior, a integral será reduzida a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(3x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{4x \cdot \cos(3x)}{9} dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{4\pi \cdot \cos(3\pi)}{9} - \frac{4 \cdot 0 \cdot \cos(3.0)}{9}\right] = 2 \cdot \left[\frac{-4\pi}{9} - \frac{0}{9}\right] = -\frac{8\pi}{9}$$

Então, temos:

$$b_3 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \cos(x)dx}{2\pi} = 2 \cdot \frac{-\frac{8\pi}{9}}{2\pi} = -\frac{8}{9}$$

Calculando agora o parâmetro b_4, temos:

$$b_4 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2\cos(4x)dx}{2\pi}$$

Aplicando seus conhecimentos de cálculo integral, você pode verificar que a integral do numerador, sem os limites, será igual a:

$$\int 2x^2\cos(4x)dx = \frac{x^2 \cdot \text{sen}(4x)}{2} + \frac{x \cdot \cos(4x)}{4} - \frac{\text{sen}(4x)}{16}$$

De maneira análoga ao caso anterior, a integral será reduzida a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2\cos(4x)dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi}\frac{x\cdot\cos(4x)}{4}dx =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{\pi\cdot\cos(4\pi)}{4} - \frac{0\cdot\cos(4.0)}{4}\right] = 2\cdot\left[\frac{\pi}{4} - \frac{0}{4}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Então, temos:

$$b_4 = 2.\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2\cos(x)dx}{2\pi} = 2\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Vejamos agora se conseguimos encontrar uma lei de formação. Colocando os quatro parâmetros calculados e reescrevendo de uma forma conveniente:

$$b_1 = -8 = -\frac{8}{1} = -\frac{8}{1^2}$$

$$b_2 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{8}{2^2}$$

$$b_3 = -\frac{8}{9} = -\frac{8}{3^2}$$

$$b_2 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{8}{4^2}$$

Então, podemos obter uma lei de formação dos coeficientes dos termos dos cossenos da série? Sim, sem dúvida.

Para os coeficientes de índices ímpares, os coeficientes serão da forma $-\frac{8}{i^2}$ e para os índices pares, $\frac{8}{i^2}$

Finalizando o exemplo 2, temos a seguinte série de Fourier:

$$f(x)=\frac{2^2}{3}-\frac{8}{1^2}cos(x)+\frac{8}{2^2}cos(2x)-\frac{8}{3^2}cos(3x)+\frac{8}{4^2}cos(4x)-\cdots$$

Graficamente, considerando 9 termos da série, podemos observar o comportamento da expansão em relação ao gráfico original da função (figura 5.28). Note que a série, representada pela linha pontilhada consegue fazer exatamente o mesmo traçado da função f(x)=2x².
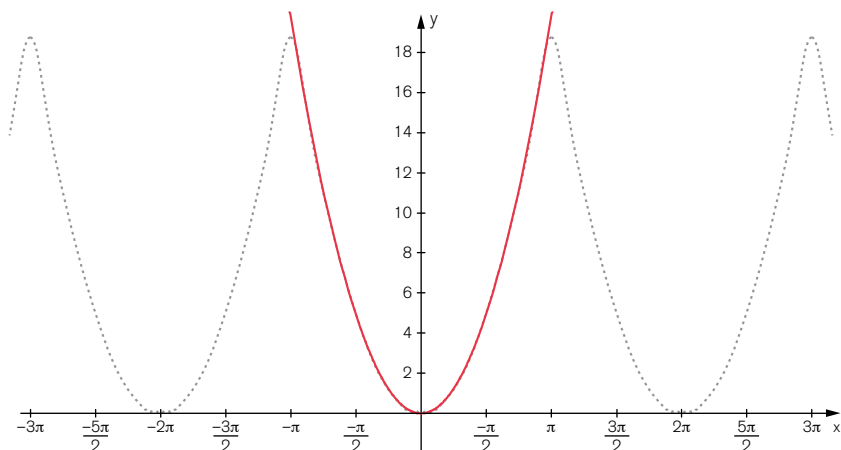
Figura 5.28 – Gráfico da série de Fourier e da função do exemplo2.

Vejamos alguns exercícios para reforçar conceitos trabalhados neste capítulo.

ATIVIDADES

16. Verifique, utilizando limite, se as sequências abaixo são convergentes ou divergentes.

a) $f(x) = \frac{4x-3}{5x^2-4}$

b) $f(x) = \frac{3x^2+7x-6}{x+3}$

17. Determine a expansão em série de Fourier para a função dada abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x, -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x, 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

18. Determine a expansão em série de Fourier para a função dada abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} -x, -1 \leq x \leq 0 \\ x, 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

REFLEXÃO

Discutimos neste capítulo diversos conceitos sobre séries e funções periódicas que são utilizadas para a composição da expansão via série de Fourier. Essas séries podem ser encontradas utilizando-se a abordagem das médias das funções, mas será que temos outras maneiras de obter os coeficientes da série?

Ainda, será que podemos gerar as séries sem trabalhar com as mesmas matematicamente?

Para melhor reflexão de sua parte, indicamos algumas referências para complementar o conteúdo deste capítulo. Em primeiro lugar, uma referência que além de se utilizar de um método alternativo para a obtenção dos parâmetros, associa a série de Fourier ao uso de osciloscópios em medidas de sinais:

www.jdbte.com.br/wjrteleco/stfour.pdf [acessado em 22/06/2015].

Ainda, a referência abaixo que apresenta outra maneira de obter os coeficientes da série:

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. Equações Diferenciais. Volume 2. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001. Capítulo 11, páginas de 206 a 209.

CONCEITO

Alguns termos citados neste capítulo são de especial importância e aparecerão nos capítulos futuros, sendo assim reforçamos seus conceitos neste glossário.

14. **Série**: soma dos termos de uma dada sequência;
15. **Série infinita**: soma dos termos de uma sequência infinita;
16. **Sequência convergente**: sequência que possui um limite igual a um valor qualquer L, quando os termos tendem a infinito;
17. **Funções ou séries periódicas:** ocorrem quando, a cada novo período (espaçamento no domínio) o comportamento da função ou da série se repete.
18. **Função par:** é uma função que apresenta simetria ao longo do domínio, o que quer dizer que f(x) = f(-x).
19. **Função ímpar:** é uma função que apresenta uma simetria em função da origem, ou seja, f(-x) = -f(x);
20. **Série de Fourier:** é uma série infinita que contém a soma de funções periódicas trigonométricas, senos e cossenos, e serve para representar em forma expandida aproximada qualquer função matemática.

LEITURA

Para se aprofundar nos conceitos de séries de Fourier, recomendamos que você leia as obras listadas abaixo, relacionadas com aplicações práticas das séries de Fourier e o uso dessas séries em equações diferenciais:

NETO, J.F. Aplicação da Transformada de Fourier no Processamento Digital de Imagens. UFPE, 1999.

http://www.cin.ufpe.br/~ags/Sinais/Aplica%E7%E3o%20da%20Transformada%20de%20Fourier%20no%20processamento%20digital%20de%20imagens.pdf

Acessado em 22/06/2015.

PUPIN, J.R. Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens. DM, UFSCar, 2011

http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/6/TCCJosiana.pdf

Acessado em 22/06/2015.

QUINTINO, L.O. Séries de Fourier e Aplicações em Equações Diferenciais Parciais. Universidade Federal de Alfenas, 2013.

http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/6/TCCJosiana.pdf

Acessado em 22/06/2015.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ZILL, D.G. e CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. Volume 2. 3ª Ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

MATOS, M. P. **Séries e Equações Diferenciais**. 1ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002.

SALAS, S. L., HILLE, E. e ETGEN, G. J. **Cálculo** – Vol. 2. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2005.

GABARITO

Capítulo 1

01.

a) Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{dy}{dx} = sen2x - 3$$
$$dy = (sen2x - 3)dx$$

Integrando ambos os lados

$$\int dy = \int (sen2x - 3)dx$$
$$y + C_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x - 3x + C_2$$
$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x - 3x + (C_2 - C_1)$$
$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x - 3x + C$$

Que é a solução geral da equação diferencial. Para testar, basta derivar a solução geral, da forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - 3x + C\right)}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}{dx} + \frac{d(-3x)}{dx} + \frac{d(C)}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\cdot 2(-sen2x) + (-3) + 0$$
$$\frac{dy}{dx} = sen2x - 3$$

Utilizando a condição y(0) = 3 na solução geral, temos:

$$y(0) = -\frac{1}{2}\cos(2.0) - 3.0 + C = 3$$

$$-\frac{1}{2}\cos 0 - 0 + C = 3$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 1 + C = 3$$

$$-\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

Assim, a solução particular dada a condição é

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x - 3x + \frac{7}{2}$$

b) Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{dy}{dx} = xe^x$$

$$dy = xe^x dx$$

Integrando ambos os lados

$$\int dy = \int xe^x dx$$

Resolvendo a integral do lado direito por partes, temos:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - (e^x + C_1)$$

Portanto, temos:

$$\int dy = xe^x - e^x - C_1$$

$$y + C_2 = xe^x - e^x - C_1$$

$$y = e^x(x-1) - C_1 - C_2$$

$$y = e^x(x-1) + C$$

Que é a solução geral da equação diferencial. Para testar, basta derivar a solução geral, da forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(e^x\left(x-1\right)+C\right)}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(xe^x\right)}{dx}-\frac{d\left(e^x\right)}{dx}+\frac{d\left(C\right)}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=e^x+xe^x-e^x+0$$
$$\frac{dy}{dx}=xe^x$$

Utilizando a condição y(0) = 1 na solução geral, temos:

$$y(0)=e^0(0-1)+C=1$$
$$1\cdot(0-1)+C=1$$
$$-1+C=1\Rightarrow C=2$$

Assim, a solução particular dada a condição é

$$y=e^x\left(x-1\right)+2$$

c) Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dx}=\frac{sen\ \ x}{4}$$
$$\frac{dy}{\cos x dx}=\frac{sen\ \ x}{4}$$
$$4dy=sen\ \ x\cdot\cos x\ \ dx$$

Integrando ambos os lados

$$\int 4dy=\int sen\ \ x\cdot\cos x dx$$

Resolvendo a integral do lado direito por substituição, temos:

$$u=sen\ \ x\Rightarrow du=\cos x dx$$
$$\int u\ \ du=\frac{u^2}{2}+C_1=\frac{sen^2 x}{2}+C_1$$

Portanto, temos:

$$\int 4dy = \frac{sen^2 x}{2} + C_1$$

$$4y + C_2 = \frac{sen^2 x}{2} + C_1$$

$$4y = \frac{sen^2 x}{2} + (C_1 - C_2)$$

$$4y = \frac{sen^2 x}{2} + C$$

$$y = \frac{1}{4} . \left(\frac{sen^2 x}{2} + C \right)$$

$$y = \frac{sen^2 x}{8} + \frac{C}{4}$$

$$y = \frac{sen^2 x}{8} + C$$

Que é a solução geral da equação diferencial. Para testar, basta derivar a solução geral, da forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{sen^2 x}{8} + C \right)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{sen^2 x}{8} \right)}{dx} + \frac{d(C)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} \cdot (2sen\ \ x \cdot \cos x) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\ \ x . \cos x}{4}$$

$$4\text{dy} = sen\ \ x \cdot \cos x\ \ dx$$

Utilizando a condição *y(0) = 2* na solução geral, temos:

$$y(0) = \frac{sen^2 0}{8} + C = 2$$

$$\frac{0}{8} + C = 2$$

$$0 + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

Assim, a solução particular dada a condição é

$$y = \frac{sen^2 x}{8} + 2$$

02.

a) é de segunda ordem, de grau 2, pois a derivada de grau mais elevado é de ordem 2.
b) é de terceira ordem, de grau 3, pois a derivada de grau mais elevado é de ordem 3.
c) é de primeira ordem, de grau 1, pois a derivada de grau mais elevado é de ordem 1.

03.

a) A equação diferencial é não linear.
b) A equação diferencial é linear.
c) A equação diferencial é linear.

04. Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{2dy}{dx} + y = 0$$
$$2dy = -ydx$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}dx$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{2}dx$$
$$ln\ y + C_1 = -\frac{1}{2}x + C_2$$
$$ln\ y = -\frac{1}{2}x + (C_2 - C_1)$$
$$ln\ y = -\frac{1}{2}x + C$$
$$e^{ln\ y} = e^{\left(-\frac{x}{2}+C\right)}$$
$$y = e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot e^{C}$$
$$y = C \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Representando graficamente a solução geral para C=2, C=5 e para C=10, temos o gráfico reproduzido na figura G4.
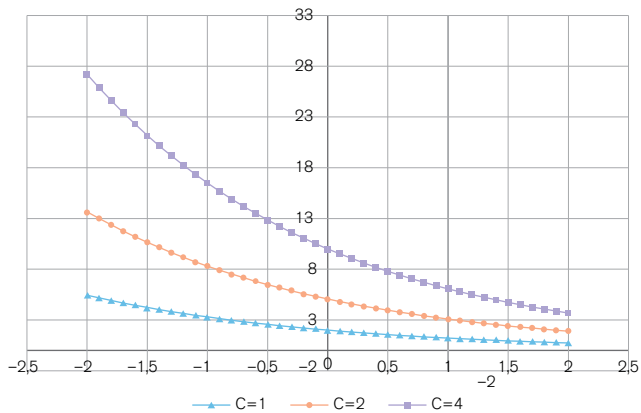
Figura G4 – Soluções para o exercício 4, com C=2, C=5 e C=10

Capítulo 2

01.

a) $y'(x^2 + 9) = xy$

Reescrevendo, temos:

$$\frac{dy}{dx}\left(x^2+9\right)=xy$$

$$dy\left(x^2+9\right)=xydx$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^2+9}$$

Como já está separada, podemos integrar:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x^2+9}$$

A integral do lado direito pode ser resolvida por substituição, da forma:

$$u=x^2+9\Rightarrow du=2x.dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

Temos então a seguinte solução geral:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{du}{2u}$$

$$\text{Ln}\, y + C_1 = \frac{1}{2}\text{Ln}\, u + C_2$$

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\sqrt{u} + C$$

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\sqrt{x^2+9} + C$$

$$y = e^{\text{Ln}\sqrt{x^2+9}+C}$$

$$y = C \cdot \sqrt{x^2+9}$$

Aplicando a condição inicial y(4) = 10, temos:

$$10 = C \cdot \sqrt{4^2+9} \Rightarrow 10 = C \cdot \sqrt{16+9} \Rightarrow 10 = C \cdot 5 \Rightarrow C = 2$$

Então a solução particular será:

$$y = 2\sqrt{x^2+9}$$

b) $y' = y^{-3}$ sen x

Reescrevendo, temos:

$$\frac{dy}{dx} = y^{-3} \text{sen}\, x$$

$$y^3 dy = \text{sen}\, x\, dx$$

Como já está separada, podemos integrar:

$$\int y^3 dy = \int \text{sen}\, x\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} + C_1 = -\cos x + C_2$$

$$\frac{y^4}{4} = -\cos x + C$$

$$y^4 = -4 \cdot \cos x + 4C$$

$$y = (-4 \cdot \cos x + C)^{\frac{1}{4}}$$

Aplicando a condição inicial y(0) = 2, temos:

$$2=(-4.\cos 0+C)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2=(C-4)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^4=C-4 \Rightarrow C=16+4=20$$

Então a solução particular será:

$$y=(-4.\cos x+20)^{\frac{1}{4}}$$

02.

a) $xy^3\dfrac{dy}{dx}=2y^4+x^4$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$xy^3\frac{dy}{dx}=2y^4+x^4 \Rightarrow xy^3dy=\left(2y^4+x^4\right)dx$$

$$\left(2y^4+x^4\right)dx-xy^3dy=0$$

Vamos verificar a homogeneidade da equação. Temos:

$$g(x,y)=2y?^4+x^4=2x^0y^4+x^4y^0$$

$$h(x,y)=-xy^3=?-x^1y^3$$

Assim, tanto a função *g* quanto a função *h* são homogêneas de grau 4.

Fazendo a substituição *y=ux* e escrevendo *dy* como *dy=u.dx+x.du*, temos:

$$g(x,y)dx-h(x,y)dy=0$$

$$(2u^4x^4+x^4)\cdot dx-(u^3x^4)(u.dx+x.du)=0$$

$$(2u^4x^4+x^4)\cdot dx-(u^3x^4)u.dx-(u^3x^4)\cdot x\cdot du=0$$

$$(2u^4x^4+x^4)\cdot dx-u^4x^4\cdot dx-u^3x^5\cdot du=0$$

$$(2u^4x^4+x^4-u^4x^4)\cdot dx-(u^3x^5)\cdot du=0$$

$$(u^4x^4+x^4)\cdot dx-(u^3x^5)\cdot du=0$$

$$x^4(u^4+1)\cdot dx-x^5(u^3)vdu=0$$

Dividindo a expressão por x^4 , temos:

$$\left(u^4+1\right)\cdot dx-x\left(u^3\right)\cdot du=0$$

Dividindo a expressão por u^2, temos:

$$\left(\frac{u^4+1}{u^3}\right)\cdot dx-x\cdot du=0$$

Multiplicando a expressão por $\frac{u^3}{x \cdot (u^4 + 1)}$ temos:

$$\frac{1}{x} \cdot dx - \left(\frac{u^3}{u^4 + 1} \right) \cdot du = 0$$

Como está separável, basta utilizar a integral dos dois lados.

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \left(\frac{u^3}{u^4 + 1} \right) du = 0$$

Resolvendo a integral para *du* com substituição, temos:

Chamando de $u^4 + 1$ de z, *du* será igual a $\frac{dz}{4u^3}$ e assim:

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{4z} dz = 0$$

$$\text{Ln}\, x + C_1 - \frac{1}{4} \text{Ln}\, z + C_2 = 0$$

$$\text{Ln}\, x - \frac{1}{4} \text{Ln}(u^4 + 1) = C$$

Como fizemos y = ux, então $u = \frac{y}{x}$:

$$\text{Ln}\, x - \frac{1}{4} \text{Ln}\left(\frac{y^4}{x^4} + 1 \right) = C$$

$$\text{Ln}\, x - \frac{1}{4} \text{Ln}\left(\frac{y^4 + x^4}{x^4} \right) = C$$

Multiplicando a expressão por 4, temos:

$$4.\text{Ln}\,x - \text{Ln}\left(\frac{y^4 + x^4}{x^4}\right) = C$$

$$\text{Ln}\,x^4 - \text{Ln}\left(\frac{y^4 + x^4}{x^4}\right) = C$$

$$\text{Ln}\left[\frac{x^4}{\frac{y^4 + x^4}{x^4}}\right] = C$$

$$\text{Ln}\left[\frac{x^8}{y^4 + x^4}\right] = C$$

$$\text{Ln}\left[\frac{x^8}{y^4 + x^4}\right] = \text{Ln}C$$

$$\text{Ln}\left[\frac{x^8}{y^4 + x^4}\right] - \text{Ln}C = 0$$

$$\text{Ln}\left[\frac{x^8}{C.\left(y^4 + x^4\right)}\right] = 0$$

$$\frac{x^8}{C.\left(y^4 + x^4\right)} = e^0$$

Temos finalmente uma solução geral para a equação diferencial dada por:

$$\frac{x^8}{C.\left(y^4 + x^4\right)} - 1 = 0$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$2xy \cdot dy = \left(y^2 - x^2\right) \cdot dx \Rightarrow \left(y^2 - x^2\right) \cdot dx - 2xy \cdot dy = 0$$

Multiplicando por (-1), temos:

$$\left(x^2 - y^2\right) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$$

Vamos verificar a homogeneidade da equação. Temos:

$$g(x,y) = x^2 - y^2 = x^2y^0 - x^0y^2$$
$$h(x,y) = 2xy = 2x^1y^1$$

Assim, tanto a função g quanto a função h são homogêneas de grau 2.

Fazendo a substituição y=ux e escrevendo dy como dy=u.dx+x.du, temos:

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$$
$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + (2ux^2)(u \cdot dx + x \cdot du) = 0$$
$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + (2ux^2)u \cdot dx + (2ux^2) \cdot x \cdot du = 0$$
$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + 2u^2x^2 \cdot dx + (2ux^3) \cdot du = 0$$
$$(x^2 - u^2x^2 + 2u^2x^2) \cdot dx + (2ux^3) \cdot du = 0$$
$$(x^2 + u^2x^2) \cdot dx + (2ux^3) \cdot du = 0$$
$$x^2(1 + u^2) \cdot dx + x^2(2ux) \cdot du = 0$$

Dividindo a expressão por x^2, temos:

$$\left(1 + u^2\right) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0$$

Dividindo a expressão por 2u, temos:

$$\left(\frac{1 + u^2}{2u}\right) \cdot dx + x \cdot du = 0$$

Multiplicando a expressão por $\frac{2u}{x \cdot \left(1 + u^2\right)}$ temos:

$$\frac{1}{x} \cdot dx + \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right) \cdot du = 0$$

Como está separável, basta utilizar a integral dos dois lados.

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right) du = 0$$

Resolvendo a integral para du com substituição, temos:

Chamando de1 + u^2 de z, du será igual a $\frac{dz}{2u}$ e assim:

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{z}dz = 0$$
$$Lnx + C_1 + Lnz + C_2 = 0$$
$$Lnx + Ln\,(1+u^2) = C$$
$$Ln\,[x \cdot (1+u^2)] = C$$
$$x \cdot (1+u^2) = e^C$$

Como fizemos y = ux, então $u = \frac{y}{x}$:

$$x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C$$
$$x \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = C$$

Temos finalmente uma solução geral para a equação diferencial dada por:

$$\frac{x^2 + y^2}{x} - C = 0$$

03.

a) $y' = -\left(\frac{2x - 3y}{2y - 3x}\right)$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2x - 3y}{2y - 3x}\right) \Rightarrow (2y - 3x)dy = -(2x - 3y)dx$$
$$(2y - 3x)dy + (2x - 3y)dx = 0$$

Vejamos se a equação diferencial é ou não exata. Temos:

$$g(x,y) = 2x - 3y \Rightarrow \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -3$$
$$h(x,y) = 2y - 3x \Rightarrow \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = -3$$

Assim a equação diferencial é exata e portanto:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = g(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 3y \Rightarrow \partial f(x,y) = (2x - 3y)dx$$

Calculando a integral em ambos os lados, em relação a x, temos:

$$\int \partial f(x,y)dx = \int (2x - 3y)dx$$
$$f(x,y) = x^2 - 3xy + u(y)$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = h(x,y) \Rightarrow \frac{\partial\left(x^2 - 3xy + u(y)\right)}{\partial y} = 2y - 3x$$
$$-3x + u'(y) = 2y - 3x \Rightarrow u'(y) = 2y - 3x + 3x \Rightarrow u'(y) = 2y$$

Integrando u'(y) em função de y, temos:

$$u\cdot(y) = 2y \Rightarrow \int u\cdot(y)dy = \int 2y\,dy \Rightarrow u(y) = y^2 + C_1$$

Desta forma, f(x,y) será igual a :

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + C_1$$

Finalmente temos:

$$C = x^2 - 3xy + y^2 + C_1$$
$$x^2 - 3xy + y^2 - C = 0$$

b) $\frac{ydy}{x^2 + y^2} = \frac{-xdx}{x^2 + y^2}$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$y(x^2 + y^2)dy = -x(x^2 + y^2)dx$$
$$y(x^2 + y^2)dy + x(x^2 + y^2)dx = 0$$
$$(yx^2 + y^3)dy + (x^3 + ?xy?^2)dx = 0$$

Vejamos se a equação diferencial é ou não exata. Temos:

$$g(x,y) = x^3 + xy^2 \Rightarrow \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2y$$
$$h(x,y) = yx^2 + y^3 \Rightarrow \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 2y$$

Assim a equação diferencial é exata e portanto:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = g(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^3 + xy^2 \Rightarrow \partial f(x,y) = \left(x^3 + xy^2\right)dx$$

Calculando a integral em ambos os lados, em relação a x, temos:

$$\int \partial f(x,y)dx = \int (x^3 + xy^2)dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + u(y)$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = h(x,y) \Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + u(y)\right)}{\partial y} = yx^2 + y^3$$

$$yx^2 + u'(y) = yx^2 + y^3 \Rightarrow u'(y) = yx^2 + y^3 - yx^2 \Rightarrow u'(y) = y^3$$

Integrando u'(y) em função de y, temos:

$$u \cdot (y) = y^3 \Rightarrow \int u \cdot (y)dy = \int y^3\,dy \Rightarrow u(y) = \frac{y^4}{4} + C_1$$

Desta forma, f(x,y) será igual a :

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C_1$$

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C_1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + C_1$$

$$f(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} + C_1$$

Finalmente temos:

$$C = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} + C_1$$

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{4} - C = 0$$

04.

a) $y' = e^{3x} + 5y$, com $y(0) = 5$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = e^{3x}$$

A equação já está linearizada e a função P(x) = – 5

Então:

$$\mu(x) = e^{\int -5dx} = e^{-5\int dx} = e^{-5x}$$

Multiplicando na equação diferencial:

$$e^{-5x}\frac{dy}{dx} - 5ye^{-5x} = e^{3x}e^{-5x}$$

Note que o lado esquerdo pode ser escrito como a derivada $\frac{d\left(ye^{-5x}\right)}{dx}$ e portanto:

$$\frac{d\left(ye^{-5x}\right)}{dx} = e^{-2x}$$

Integrando dos dois lados, temos:

$$ye^{-5x} = \int e^{-2x}dx$$

$$ye^{-5x} = -2e^{-2x} + C$$

Dividindo a expressão por e^{-5x}:

$$y = -2e^{3x} + Ce^{5x}$$

Que é a solução geral da equação diferencial. Utilizando a condição inicial y(0) = 5, temos:

$$5 = -2e^{3.0} + Ce^{5.0} \Rightarrow 5 = -2 + C \Rightarrow C = 7$$

Assim, a solução particular é:

$$y = -2e^{3x} + 7e^{5x}$$

b) $dy = x^2\,(3y + 1)\,dx$

Reescrevendo a equação diferencial, temos:

$$\frac{dy}{dx} = x^2(3y+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2y + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2y = x^2$$

A equação já está linearizada e a função P(x) = $-3x^2$

Então:

$$\mu(x) = e^{\int -3x^2 dx} = e^{-3\frac{x^3}{3}} = e^{-x^3}$$

Multiplicando na equação diferencial:

$$e^{-x^3}\frac{dy}{dx} - 3x^2ye^{-x^3} = x^2e^{-x^3}$$

Note que o lado esquerdo pode ser escrito como a derivada $\frac{d\left(ye^{-x^3}\right)}{dx}$ e, portanto:

$$\frac{d\left(ye^{-x^3}\right)}{dx} = x^2e^{-x^3}$$

Integrando dos dois lados, temos:

$$ye^{-x^3} = \int x^2e^{-x^3}dx$$

Resolvendo o lado direito por substituição, temos:

$$u = e^{-x^3} \Rightarrow du = -3x^2e^{-x^3}dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-3x^2e^{-x^3}}$$

Assim,

$$\int x^2e^{-x^3}dx = -\frac{1}{3}\int du = -\frac{1}{3}u + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$$

Substituindo na resolução da equação diferencial, temos:

$$ye^{-x^3} = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$$

Dividindo a expressão por $e^{(-x^3)}$:

$$y = -\frac{1}{3} + Ce^{x^3}$$

Que é a solução geral da equação diferencial.

Capítulo 3

01. Fazendo a associação da equação diferencial com a equação auxiliar teremos:

$m_2 - 4m + 13 = 0$

Onde determinamos $\Delta = -36$, ou seja, serão duas raízes complexas e distintas, dadas por:

$m_1 = 2 + 3i$

$m_2 = 2 - 3i$

Em associação com a solução complexa, temos $s = 2$ e $t = 3$, resultando na solução geral da equação diferencial:

$y = e^{2x} (C_1 \cos (3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x))$

Submetendo a solução geral às condições iniciais teremos:

$6 = e^{(2(0))} (C_1 \cos (3(0)) + C_2 \operatorname{sen}(3(0)))$

Ou seja,

$6 = e^0 (C_1 \cos (0) + C_2 \operatorname{sen}(0))$

Ou ainda

$6 = 1(C_1 (1) + C_2 (0))$

Então,

$C_1 = 6$

E substituindo $y' = 10$ quando $x = 0$ na derivada da solução geral, dada por:

$y' = 2e^{2x} (C_1 \cos (3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)) + e^{2x} (3C_2 \cos(3x) - 3C_1 \operatorname{sen}(3x))$

Teremos:

$10 = 2e^{(2(0))} (C_1 \cos (3(0)) + C_2 \operatorname{sen}(3(0))) + e^{(2(0))} (3C_2 \cos(3(0)) - 3C_1 \operatorname{sen}(3(0)))$

Ou seja,

$10 = 2e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen}0) + e^0 (3C_2 \cos0 - 3C_1 \operatorname{sen}0)$

Resultando em:

$10 = 2(1)(C_1 (1) + C_2 (0)) + (1)(3C_2 (1) - 3C_1 (0))$

Sendo

$10 = 2C_1 + 3C_2$

Substituindo $C_1 = 6$ na expressão acima teremos $C_2 = \frac{-2}{3}$

E a solução particular da equação diferencial será:

$$y = e^{2x}\left(6\cos(3x) - \frac{2}{3}\text{sen}(3x)\right)$$

02. Se associarmos a equação diferencial

$y'' - 2y' + 2y = 0$

Com sua equação auxiliar dada por:

$m^2 - 2m + 2 = 0$

Encontramos as raízes complexas da equação, uma vez que $\Delta = -4 < 0$.

A solução dada por $m_1 = 1 + i$ e $m_1 = 1 - i$

Chegando à solução geral dada por:

$y = e^x (C_1 \cos(x) + C_2 \text{sen}(x))$

03. Para iniciar a resolução devemos passar a equação diferencial de segunda para o modo padrão, uma vez que deveremos encontrar a solução da equação diferencial a partir de uma solução já conhecida. Então, dividindo a equação por x, temos:

$$\frac{xy''}{x} + \frac{y'}{x} = 0$$

De forma que a equação toma a forma:

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0$$

Entendemos que para a resolução, $P(x) = \frac{1}{x}$ e $y_1 = \ln x$. Então, substituindo na expressão para o cálculo da outra solução, temos:

$$y_2(x) = y_1(x).\int \frac{e^{-\int u(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$$

Ou seja,

$$y_2(x) = \ln x . \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{(\ln x)^2} dx$$

Como a integral do expoente do numerador é dada por:

$$e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

Então,

$$y_2(x) = \ln x . \int \frac{e^{x^{-1}}}{(\ln x)^2} dx = \ln x . \int \frac{x^{-1}}{(\ln x)^2} dx$$

Resolvendo a integral por substituição simples, fazendo u = lnx, chegamos à integral

$$y_2(x) = \ln x . \int \frac{x^{-1}}{u^2} x du = \ln x . \int u^{-2} du = \ln x . (-\ln x)^{-1}$$

Dessa forma a outra solução será da forma

$y_2 (x) = -1$

A solução geral será da forma:

$y = C_1 \ln x - C_2$

04. A equação auxiliar associada à equação linear de segunda ordem é dada por:

$$y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0$$

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$$

Cujas soluções são duas raízes iguais a – 0,5. Portanto, m = – 0,5.

E como a solução geral para a equação diferencial com duas raízes iguais assume a forma, temos:

$y = C_1 e^{mx} + C_2 xe^{mx}$

Então, a solução será escrita como:

$y = C_1 e^{(-0,5x)} + C_2 xe^{(-0,5x)}$

Se substituirmos os valores y = 2, quando x = 0 na solução geral e y' = 1, quando x = 0 na primeira derivada dessa solução, então encontraremos duas equações. Resolvendo o sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ -0{,}5C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Encontramos, então $C_1 = 2$ e $C_2 = 2$, sendo a solução particular da equação diferencial

$y + 1y' + \frac{1}{4}y = 0$, da forma:

$y = 2e^{(-0,5x)} + 2xe^{(-0,5x)}$

Capítulo 4

01. Aplicando a transformada de Laplace na função temos:

a) $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = 3\mathcal{L}\left(t^5\right)$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = 3\frac{5!}{s^{5+1}} = \frac{360}{s^6}$$

b) $L(f(t)) = 3L(t^2) - L(e^{(-7t)}) + L(8)$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = 3\frac{2!}{s^{2+1}} - \frac{1}{s+7} + \frac{8}{s} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+7} + \frac{8}{s}$$

c) $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = 5\mathcal{L}\left(\left(e^t - e^{-t}\right)^2\right) = 5\mathcal{L}\left(e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}\right) = 5\mathcal{L}\left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right)$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = 5\mathcal{L}\left(e^{2t}\right) - \mathcal{L}(2) + \mathcal{L}(e^{-2t}) = \frac{5}{s-2} - \frac{10}{s} + \frac{5}{s+2}$$

d)

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(2 - 2\cos(3t)\right) = 2\mathcal{L}\left(1 - \cos(3t)\right)$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = 2\mathcal{L}\left(1 - \cos(3t)\right) = 2\left(\frac{9}{s\left(s^2+9\right)}\right) = \frac{18}{s\left(s^2+9\right)}$$

e)

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\mathcal{L}\left(2t^3+4e^{-3t}-7sen^2 2t\right)=2\mathcal{L}\left(t^3\right)+4\mathcal{L}(e^{-3t})-7\mathcal{L}(sen^2 2t)$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)=2\mathcal{L}\left(t^3\right)+4\mathcal{L}(e^{-3t})-7\mathcal{L}(sen^2 2t)=2\frac{3!}{s^4}+4\frac{1}{s+3}-7\frac{2(2)^2}{s\left(s^2+4(2)^2\right)}$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\frac{12}{s^4}+\frac{4}{s+3}-\frac{56}{s\left(s^2+16\right)}$$

02. A partir da tabela de transformada de Laplace, associamos as transformadas inversas:

a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{2!}{2!s^3}=\frac{1}{2}t^2$$

b)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}-\frac{4}{s^4}+\frac{1}{s^6}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2}-4\frac{3!}{3!s^4}+\frac{5!}{5!s^6}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}=4t-4t^3+\frac{t^5}{120}$$

c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{7}\left(\frac{7}{s^2+7^2}\right)\right\}=\frac{5}{7}sen(7t)$$

d)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{2}^2\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+\left(\sqrt{2}^2\right)}\right)\right\}=\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}sen\sqrt{2}t$$

03. Resolvendo a equação diferencial a partir da aplicação da transformada de Laplace e das condições iniciais:

a) $y' + 6y = e^{3t}$, para $y(0) = 1$

$$\mathcal{L}(y') + 6\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{3t})$$

$$sF(s) - f(0) + 6F(s) = \frac{1}{s-3}$$

$$(s+6)F(s) - 1 = \frac{1}{s-3}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-3)(s+6)} + \frac{1}{(s+6)} = \frac{s-2}{(s-3)(s+6)}$$

Por frações parciais, temos:

$$F(s) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s-3}\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{s+6}\right)$$

Portanto, a solução da equação diferencial é:

$$f(t) = \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{8}{9}e^{-6t}$$

b) $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$, para $y(0) = 2$ e $y'(0) = 6$

$$\mathcal{L}(y'') - 6\mathcal{L}(y') + 9\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t^2e^{3t})$$

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) - 6(sF(s) - f(0)) + 9F(s) = \frac{2!}{(s-3)^3}$$

$$(s^2 - 6s + 9)F(s) - 2s + 6 = \frac{2!}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2F(s) - 2(s-3) = \frac{2!}{(s-3)^3}$$

$$F(s) = \frac{2}{(s-3)^3(s-3)^2} + \frac{2(s-3)}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

$$F(s) = 2\left(\frac{1}{(s-3)^5}\right) + 2\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{2}{4!}\left(\frac{4!}{(s-3)^{4+1}}\right) + 2\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

Portanto, a solução da equação diferencial é:

$$f(t) = \frac{t^4e^{3t}}{12} + 2e^{3t}$$

01.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4x-3}{5x^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{5-\frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{4}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}}{5-\frac{4}{\infty^2}} = \frac{0-0}{5-0} = \frac{0}{5} = 0$

Então a sequência é convergente pois tem limite.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3x^2+7x-6}{x+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+3).(3x-2)}{x+3} = \lim_{n\to\infty} (x+3) = \infty + 3 = \infty$

Então a sequência é divergente pois não tem limite.

02.

Utilizando o conceito de média da função, como feito anteriormente e considerando que a função é dividida em duas de acordo com a região do domínio, chegamos aos seguintes resultados:

$a_0 = \frac{\pi}{2}$; $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = \frac{3}{i}$; $a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = -\frac{3}{i}$

$b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = -\frac{2}{\pi i^2}$; $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$

E a série de Fourier será igual a

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{1}\text{sen}(x) - \frac{3}{2}\text{sen}(2x) + \frac{3}{3}\text{sen}(3x) - \frac{3}{4}\text{sen}(4x) + \cdots -$$

$$-\frac{2}{\pi 1^2}\cos(x) - \frac{2}{\pi 3^2}\cos(3x) - \frac{2}{\pi 5^2}\cos(5x) - \cdots$$

03.

Utilizando o conceito de média da função, como feito anteriormente e considerando que a função é dividida em duas de acordo com a região do domínio, chegamos aos seguintes resultados:

$a_0 = \frac{1}{2}$; $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$;

$b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = -\frac{4}{(i\pi)^2}$; $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$

E a série de Fourier será igual a

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\text{sen}(x) - \frac{4}{9\pi^2}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi^2}\cos(5x) - \frac{4}{49\pi^2}\cos(7x) + \cdots -$$